جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الثانية – المعادلات التفاضلية الاعتيادية

الفصل التمهيدي – طرائق التكامل

أ.د. عامر فاضل نصار
amer6767@tu.edu.iq

عنوان المحاضرة :

الطريقة الاولى : طريقة توزيع البسط على المقام

الطريقة الثانية : إضافة وطرح مقدار جبري

الطريقة الثالثة : الضرب والقسمة بمقدار جبري

الطريقة الأولى First Method

طريقة توزيع البسط على المقام

Example (1): Evaluate $\int \frac{x^2+1}{x^2}dx$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2}dx = \int \frac{x^2}{x^2}dx + \int \frac{1}{x^2}dx = \int 1dx + \int x^{-2}dx = x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = x - \frac{1}{x} + c$$

Example (2): Evaluate $\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \tan^{-1}(x) + c$$

Example (3): Evaluate $\int \frac{2x+3}{1-x^2}dx$

$$\int \frac{2x+3}{1-x^2}dx = \int \frac{2x}{1-x^2}dx + \int \frac{3}{1-x^2}dx = -\int \frac{-2x}{1-x^2}dx + 3\int \frac{1}{1-x^2}dx = -\ln(1-x^2) + 3\tanh^{-1}(x) + c$$

Example (4): Evaluate $\int \frac{2x+5}{x^2+2x+1}dx$

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2x+2+3}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}dx + \int \frac{3}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2}dx + \int \frac{3}{(x+1)^2}dx$$

$$= 2\int \frac{dx}{(x+1)} + 3\int (x+1)^{-2}dx = 2\ln(x+1) + 3\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c = 2\ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + c$$

Example (5): Evaluate $\int \frac{2+e^x}{e^{3x}}dx$

$$\int \frac{2+e^x}{e^{3x}}dx = \int \frac{2}{e^{3x}}dx + \int \frac{e^x}{e^{3x}}dx = 2\int e^{-3x}dx + \int e^{-2x}dx = \frac{2}{-3}\int e^{-3x}(-3)dx + \frac{1}{-2}\int e^{-2x}(-2)dx$$

$$= -\frac{2}{3}e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$$

الطريقة الثانية Second Method

تكامل قسم من الدوال الكسرية بإضافة وطرح مقدار جبري للبسط (او اجراء القسمة الطويلة للمقدار الجبري) مما يسهل عملية التكامل

Example (6): Evaluate $\int \frac{x}{x+1}dx$

$$\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int (\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1})dx = \int 1dx - \int \frac{1}{x+1}dx = x - \ln(x+1) + c$$

Example (7): Evaluate $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{-1+1+x^2}{1+x^2}dx = \int (\frac{-1}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{1+x^2})dx = \int (\frac{-1}{1+x^2} + 1)dx = -\tan(x) + x + c$$

Example (8): Evaluate $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2}dx = \int \frac{x^2-1+1}{1-x^2}dx = \int (\frac{x^2-1}{1-x^2} + \frac{1}{1-x^2})dx = \int (-1)dx + \int \frac{1}{1-x^2}dx = -x + \tanh^{-1}(x) + c$$

$$\text{OR} \quad = -x + \coth^{-1}(x) + c$$

Example (9): Evaluate $\int \frac{1}{x(x^2+2x+1)}dx$

$$I = \int \frac{1}{x(x^2+2x+1)}dx = \int \frac{1+2x+x^2-2x-x^2}{x(x^2+2x+1)}dx = \int \frac{1+2x+x^2-(x^2+2x)}{x(x^2+2x+1)}dx$$

$$I = \int \frac{1+2x+x^2}{x(x^2+2x+1)}dx - \int \frac{x(x+2)}{x(x^2+2x+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{(x+2)}{x^2+2x+1}dx$$

$$I = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x+1+1}{x^2+2x+1}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+1}dx$$

$$I = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+1}dx - \int (x+1)^{-2}dx$$

$$I = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+1) - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c$$

Third Method الطريقة الثالثة

نكامل قسم من الدوال الكسرية بالضرب والقسمة بمقدار جبري معين مما يسهل عملية التكامل

Example (10): Evaluate $\int \frac{dx}{1+e^x}$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}dx}{(1+e^x)e^{-x}} = -\int \frac{-e^{-x}dx}{e^{-x}+1} = -\ln(e^{-x}+1) + c$$

يمكننا حل هذا المثال باستخدام الطريقة الثانية

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x}{1+e^x}dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = x - \ln(1+e^x) + c$$

Example (11): Evaluate $\int \frac{dx}{5+e^{-x}}$

$$\int \frac{dx}{5+e^{-x}} = \int \frac{e^{x}dx}{(5+e^{-x})e^{x}} = \frac{1}{5}\int \frac{5e^{x}dx}{5e^{x}+1} = \frac{1}{5}\ln(5e^{x}+1)+c$$

يمكننا حل هذا المثال باستخدام الطريقة الثانية

$$\int \frac{dx}{5+e^{-x}} = \int \frac{1}{5+e^{-x}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5+e^{-x}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5+e^{-x}-e^{-x}}{5+e^{-x}}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5+e^{-x}}{5+e^{-x}}dx + \frac{1}{5}\int \frac{-e^{-x}}{5+e^{-x}}dx$$

$$= \frac{1}{5}\int 1dx + \frac{1}{5}\int \frac{-e^{-x}}{5+e^{-x}}dx = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}\ln(5+e^{-x})+c$$

Example (12): Evaluate $\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$

$$\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}} = \int \frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\cdot\frac{e^{x}}{e^{x}}dx = \int \frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^{x}dx}{1+(e^{x})^{2}} = \tan^{-1}(e^{x})+c$$

Example (13): Evaluate $\int \sec x dx$

$$\int \sec x dx = \int \sec x \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}dx = \int \frac{\sec^{2}x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}dx = \ln(\sec x+\tan x)+c$$

Example (14): Evaluate $\int \csc x dx$

$$\int \csc x dx = \int \csc x \frac{\csc x+\cot x}{\csc x+\cot x}dx = \int \frac{\csc^{2}x+\csc x\cot x}{\csc x+\cot x}dx = -\int \frac{-\csc^{2}x-\csc x\cot x}{\csc x+\cot x}dx$$

$$= -\ln(\csc x+\cot x)+c$$

Example (15): Evaluate $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{1+\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{1-\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^{2}x}dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^{2}x}dx = \int \frac{1}{\sin^{2}x}dx - \int \frac{\cos x}{\sin^{2}x}dx$$

$$= \int \csc^{2}x dx - \int (\sin x)^{-2}\cos x dx = -\cot x - \frac{[\sin x]^{-1}}{-1}+c = -\cot x + \frac{1}{\sin x}+c$$

Exercise (1): Evaluate the integrals.

No.	Question	Answer
1	$\int \frac{5dx}{1-\cos x}$	$I=-5\cot x-5\frac{1}{\sin x}+c$

2	$\int \frac{dx}{1+\sin x}$	$I=\tan x+\frac{1}{\cos x}+c$
3	$\int \frac{dx}{1-\sin x}$	$I=\sinh^{-1}x+\sin^{-1}x+c$
4	$\int \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$	$I=\sinh^{-1}x+\sin^{-1}x+c$
5	$\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$I=2\sin^{-1}x-x+c$
6	$\int \frac{1}{x(x^2+6x+9)}dx$	$I=\frac{1}{9}\ln x-\frac{1}{9}\ln(x+3)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+3}+c$