جامعة تكريت

كلية التربية للبنات

قسم الرياضيات

المرحلة : الرابعة

المادة : الاحصاء الرياضي

Properties of good Estimation

م. اسماء صالح قدوري

asmaa.salih@tu.edu.iq

Properties of good Estimation

إن المبدأ العام لنظرية التخمين بنقطة هو التوصل الى أفضل مخمن (Best Estimator) من بين جملة مخمنات أخرى بحيث أن هذا المخمن يكون أقرب ما يمكن لقيمة θ المطلوب تخمينها وبغية اعتبار هذا التخمين كأفضل تخمين ممكن فإن ذلك يتطلب صفات معينة يتوجب توفرها في ذلك التخمين لكي يكون مخمن جيد، ومن صفات المخمن الجيد

1- Consistency

اذا كانت $\hat{\theta}_n$ تمثل تقدير للمعلمة θ على أساس عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من مجتمع له دالة كتلة احتمالية $p(x,\theta)$ أو دالة كثافة احتمالية $f(x,\theta)$ عندئذ يقال أن $\hat{\theta}n$ هي تقدير متسق للمعلمة θ اذا كان $\hat{\theta}n$ متقارب احتمالياً من θ عندما n تقترب من ∞

$$\hat{\theta}n \xrightarrow{p} \theta \ when\ \ n \to$$ أي $(if\ \hat{\theta}n$ csnveryencie in probubijity to θ)

$\lim pr\left(\left|\hat{\theta}n - \ \theta\right| > \epsilon\right) = 0, \forall\epsilon\ > 0$ وهذا يعني أن ∞

$$\text{Or } pr\ (\ lim\ \hat{\theta}n = \ \theta\ ) = 1$$

Ex : Let x_1, x_2 , ... x_n be a r,s from a Poisson population , let $\overline{x_n} = \frac{\sum xi}{n}$ is the sample mean prove that $\bar{x}\ n$ is consistency estimator for λ?

sol : $p(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, x= 0 , 1 , 2 , …

واضح هنا أن $\theta = \lambda$ و $\hat{\theta}_n = \hat{x}_n$ كذلك ، وحيث ان القياسات $x_1, x_2, \ldots x_n$ تمثل قياسات عينة عشوائية فذلك يعني أنها بحكم متغيرات عشوائية مستقلة ذات نفس التوزيع أي أن

$$x_i \sim poisson\ (\lambda), i = 1,2, \ldots.\ \ \ldots.n$$

$v(x) = \lambda\ , E(x) = \ \lambda\ \ , v(\overline{x_n}\ \ ) = \frac{\lambda}{n}$ وأن

وعليه واستنادا الى متباينة تشيبيشيف فأن

$$p_r\left(\left|\bar{x} - \lambda\right| > \epsilon\right) \leq \frac{\lambda}{n\epsilon^2}\ \ \ , \epsilon\ > 0$$

$$\lim p_r\left(\left|\bar{x} - \lambda\right| > \epsilon\right) \leq lim \frac{\lambda}{n\epsilon^2} = 0$$

وحيث أن الاحتمال لا يمكن أن يكون قيمة سالبة فأذن

$\lim p_r(| \ \overline{x_n} \ - \ \lambda | > \epsilon) = 0$

$\therefore p(\overline{x} = \lambda)=1$

$\overline{x}$ is consistency estimator for μ.

EX.

Let $\overline{x_n}$ is consistent estimator for μ and $x \sim N(\mu , \sigma^2)$, and let $g_{n=} \frac{n-g}{n-b} \ \overline{x_n}$,prove that g_n is also consistent for μ .

sol.

$p_r(| \ \overline{x_n} \ - \mu| > \epsilon) = 0$ because $\overline{x_n}$ is cons. for μ .

$$p(|g_{n-\mu}| > \epsilon) \leq \frac{V(g(n)}{\epsilon^2}$$

$V(g_n) = V(\frac{n-a}{n-b} , \overline{x_n})$

$= (\frac{n-a}{n-b})^2 \ . V\overline{x}$

$\therefore \ Lim_{n\to\infty} V(g_n) = Lim_{n\to\infty} (\frac{n-a}{n-b})^2 \ * Lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n}$

$= 0$

$\therefore \lim p((|g_{n-\mu}| > \epsilon) \leq \ Lim_{n\to\infty} \ \frac{V(g(n)}{\epsilon^2}$

$\therefore \ g_n$ is consistently for $\mu = 0$

∴ يمكن أن يكون هناك أكثر من تقدير متسق للمعلمة في المجتمع.

ملاحظة :

- صفة الاتساق هي صفة غاية تعبر عن سلوك التقدير $\hat{\theta}_n$.
- عندما يزداد حجم العينة نحو عدد كبير (∞) و هذا يعني أن هذه الصفة ليس لها أي معنى في حالة كون n محدودة .

- كذلك بافتراض أن $\widehat{\theta}_n$ تقدير متسق الى θ فأن في ذات الوقت يوجد عدد غير منته من تقديرات مماثلة $\widehat{\theta}_n$ تعتبر أيضا تقديرات لمتسقة الى θ .

2 – Unbiased (عدم التحيز)

Any estimator (statistic) whose Mathematical expectation is equal to the parameter θ is called Unbiased estimator the parameter θ , otherwise the statistic is said to biased .

i.e.

If $E(\ \hat{\theta}\ ) = \theta$, then $\hat{\theta}$ is an unbiased.

If $E(\ \hat{\theta}\ ) \neq \theta$, then $\hat{\theta}$ is biased.

Example:

Let $x_1, x_2, \dots x_n$ be a random sample from a Normal population $N \sim (\mu\,, \sigma^2)$, prove that $\overline{x_n}$ is unbiased estimator for μ.

sol.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$E\bar{X} = E\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1}{n}\, E\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Ex_i$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\therefore \quad E\bar{X} = \mu$$

$\therefore \bar{X}$ is unbiased estimator for μ

Example:

Let x_1, x_2, x_3, x_4 be a random sample from a Normal population $N \sim (\mu\,, \sigma^2)$, and assuming $\hat{\theta}_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i$, $\hat{\theta}_2 = \frac{3x_2+x_1}{2} - x_3$, prove that $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$, are unbiased estimator for μ.

sol.

1- $E\widehat{\theta}_1 = E[\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i]$

$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} E\ x_i = \frac{1}{4} * 4\mu = \mu$

2- $E\widehat{\theta}_2 = E[\frac{3x_2+x_1}{2} - x_3]$

$= \frac{3Ex_2+Ex_1}{2} - Ex_3 \quad = \frac{4\mu}{2} - \mu$

$= 2\mu - \mu = \mu$

$\therefore\ \widehat{\theta}_1\ ,\ \widehat{\theta}_2$ are unbiased estimator for μ

3- Efficiency (الكفاءة)

As estimator U is said to be more efficient from the estimator U^* if

$$E(U-\theta)^2 \le E(U^* - \theta)^2$$

If U and U^* are an unbiased estimators of θ , then U is more efficient from U^* if $var.(U) \le var.(U^*)$

An estimator U is said to be more efficient if there exist no another as U^* So that

$$E(U^* - \theta)^2 \le E(U - \theta)^2$$

And if U is an unbiased estimator then U is said to be most efficient if there exists no another unbiased estimator as U^* so that

$$var.(U^*) \le var.(U)$$

ويمكن حساب ما يسمى بمعامل الكفاءة حيث يمثل النسبة بين تباين التقدير الاكثر كفاءة وبين تباين تقدير آخر فاذا رمزنا له بالرمز e فأن

$$e = \frac{v(\hat{\theta}_1)}{v(\hat{\theta}_2)}$$