جـــــامعة تكـــــريت

كلية التربية للبنات قسم الرياضيات

المادة: الهندسة

المرحلة الثانية

الموضوع : بديهية باخ

مدرس المادة : م.م فاتن هيثم مولود

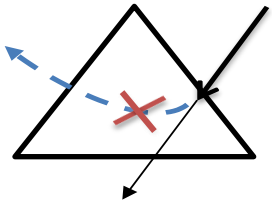
الأيميل **Fatin.Haitham@tu.edu.iq**

بديهية بـــاخ The Axiom of Pasch

لقد صاغ العالم باخ بديهيته ليس فقط على انها عبارة اعتمد عليها في البراهين و لكن لأنه ليس بالأمكان برهنتها من بديهيات اقليدس المعروفة.

تعريـف (٥): لتكن A,B,C ثلاث نقاط مختلفة ولا تقع على مستقيم واحد ان اتحاد (A,B,C) مع القطع B-C , A-C , A-B يدعى مثلثا وتدعى A,B,C الرؤوس وتدعى A-B, A-C ,C-B الاضلاع والخطوط التي تحتوي الاضلاع تدعى خطوط الاضلاع. المثلث الذي يتعين من A,B,C يرمز له بالرمز△ ABC .

بديهية بـــاخ: اذا كان مستقيم لا يمر بأي رأس من رؤوس مثلث ويقطع ضلعا واحدا في المثلث فانه يقطع في الاقل واحدا من الضلعين الأخرين.



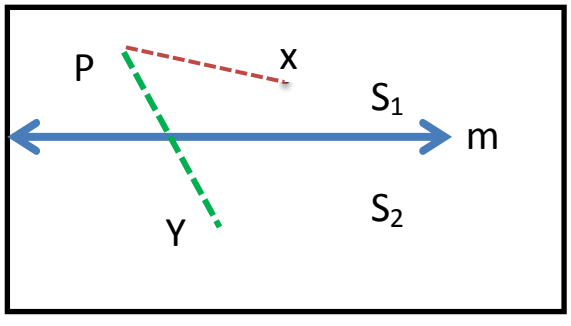
مبـــرهنة (٩): اذا كان مستقيم يقطع ضلعا واحدا من مثلث فانه يقطع في الاكثر واحدا من الضلعين الاخرين .

نتيجة: المستقيم الذي يقطع ضلعا واحدا من مثلث و الذي لا يمر بأي رأس منه فانه يقطع ضلعا واحدا فقط من الضلعين الأخرين.

تعريف (٦): ليكن m أي مستقيم ,P نقطة لا تقع على m لتكن S_1 مجموعة تحتوي على P و كل النقاط X لا تقع على m بحيث ان P-X لا تحتوي على نقطة من m . لتكن S_2 مجموعة كل النقاط Y بحيث ان P-Y تحتوي على نقطة من m فان S_1 و S_2 تدعيان جهتي المستقيم m وتدعيان أيضا نصفي المستوي بالنسبة للمستقيم m .

$S_1=\{ x : x \notin m : P\text{-}X \cap m = \varnothing \ X=P \}$

$S_2 = \{ Y: Y \notin m : P\text{-}Y \cap m \neq \varnothing \}$



مبـرهنة (١٠): جهتا المستقيم m غير خاليتين.

المعطيات: يوجد مستقيم m .

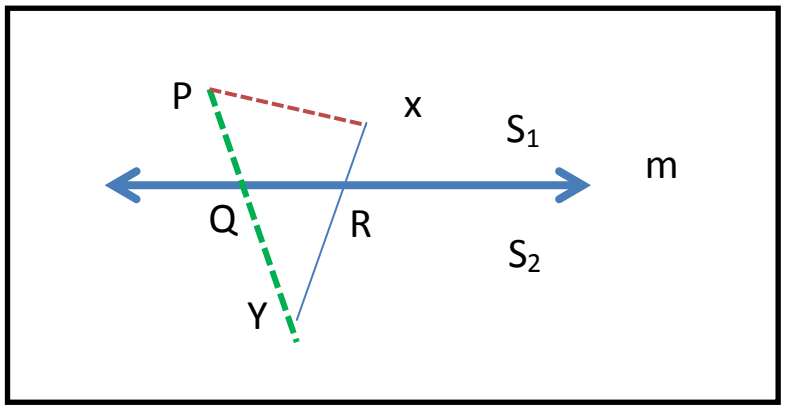
المطلوب اثباته: جهتا المستقيم m S_1 و S_2 غير خاليتين.

البرهــان: ليكن m مستقيما ، توجد نقطة Q على m ونقطة P لا تقع على m , من بديهية (٩) توجد نقطة Y بحيث ان P-Q-Y ولذلك P-Y تحتوي على نقطة Q من m أي ان $Y \in S_2$ فعليه فان المجموعة S_2 هي مجموعة غير خالية.

توجد نقطة أخرى R على m ومن بديهية (٩) توجد نقطة X بحيث ان X–R–Y في △ P X Y

بما ان m يقطع الضلع P-Y في Q ويقطع الضلع Y-X في R فانه من مبرهنة (٩) لا يمكن ان يقطع الضلع P–X .

ومن بديهية (٦) ومبرهنة (٢) لا تقع X على m فانه $X \in S_1$ أي ان جهة المستقيم m المجموعة S_1هي مجموعة غير خالية.



مبـرهنـة (١١): توجد جهتان فقط للمستقيم m وتكونان مع m تجزئة لمجموعة كل النقاط.

مبرهنة (١٢): أي مستقيم m يفصل مجموعة كل النقاط الى جهتين.

مبرهنة (١٣): ليكن m مستقيما، p و 'p نقطتين لا تقعان على m . جهتا المستقيم m المتعينتين من P و m هما نفس الجهتين المتعينتين من 'P و m .

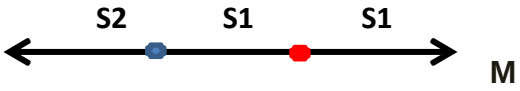
مبرهنة(١٤): ليكن 'm و m مستقيمين مختلفين، جهتا المستقيم m تختلفان عن جهتي المستقيم'm .

المجموعات المحدبة Convex Sets

تعريف (٧): تدعى المجموعة S مجموعة محدبة اذا وفقط اذا كان أي نقطتين تنتميان الى S فان P-Q تكون مجموعة جزئية من S .

مبرهنة (١٥): أ- أي مستقيم يكون مجموعة محدبة .

ب- كل من جهتي نقطة O هي مجموعة محدبة.



مبرهنة (١٦): كل قطعة مستقيم هي مجموعة محدبة.

البرهان: لتكن A-B قطعة يجب ان نبرهن ان A-B هي مجموعة محدبة . لتكن X و Y أي نقطتين مختلفتين في A-B يجب ان نبرهن ان X-Y هي مجموعة جزئية من A-B .

ليكن $Z \in X\text{-}Y$ ⟵ X-Z-Y

$X \in A\text{-}B$ ⟵ A-X-B

$Y \in A\text{-}B$ ⟵ A-Y-B

من مبرهنة (٥) A-Y-B و A-X-B ⟵ A-X-Y او A-Y-X عندما A-X-Y بما ان X-Z-Y

فان من مبرهنة (٤) ⟵ A-X-Z-Y ⟵ A-Z-Y وبما ان A-Y-B من مبرهنة (٤) ⟵

A-Z-Y-B ⟵ A-Z-B ⟵ $Z \in A\text{-}B$

عندما A-Y-X من بديهية (٥) يكون X-Y-A وبما ان X-Z-Y من مبرهنة (٤) ⟵ A-Z-X-B

⟵A-Z-B ⟵ $Z \in A\text{-}B$ وبهذا فان A-B هي مجموعة محدبة.

مبرهنة (١٧): كل من جهتي المستقيم m هي مجموعة محدبة.

مبـرهـنة (١٨): تقاطع n من المجموعات المحدبة هو مجموعة محدبة.

البرهان : ليكن A =A1∩ A2 ∩ ... ∩ An حيث ان An و A2 ..... و A1 هي مجموعات محدبة ، يجب ان نبرهن ان A هي مجموعة محدبة ،

لتكن Y,X نقطتين مختلفتين في A يجب ان نبين ان X-Yهي مجموعة جزئية من A

$X , Y \in A \longleftarrow X,Y \in A_1 , X,Y \in A_2 \ldots\ldots , X,Y \in A_n$

وبما ان An..... و A_2 وA_1 هي مجموعات محدبة

$\longleftarrow X\text{-}Y \subset A_1$ و $X\text{-}Y \subset A_2$ و .....و $X\text{-}Y \subset A_n$

$\longleftarrow X\text{-}Y \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n$

$\longleftarrow X\text{-}Y \subset A$

$\longleftarrow$ A هي مجموعة محدبة.