جامعة تكريت - كلية التربية للبنات - قسم الرياضيات

- المرحلة الأولى

-مادة الفيزياء الجامعية

- الحركة التوافقية

-أ.م.د. سروة عبدالقادر محمد صالح

srwa.muhammad@tu.edu.iq

نظرية الاهتزاز الحر

إن كل جسم يمتلك خاصيتي المرونة والقصور الذاتي له القابلية على الاهتزاز إذا ما استثير.

الاهتزاز : هي حركة جسيم ذهابا حول نقطه ثابتة تدعى بموضع التوازن والاستقرار

موضع الاستقرار : هي نقطة تنعدم فيها محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز وتمثل نقطة سكونه عندما يتوقف عن الاهتزاز

الجسيم : هو أي جسم صلب وصغير لا يتغير حجمه ويتغير كقطعة واحدة

الحركة الدورية : هي حركة جسم مهتز في مسار محدد تتكرر في فترات زمنية منتظمة وقد يكون مسار هذه الحركة بسيطا أو معقدا مثل الحركة الدائرية وحركة جسم معلق بنابض وحركة الشوكة الرنانة.

الحركة الاهتزازية : هي الحركة الدورية التي تنعكس دوراتها بفترات زمنية منتظمة أي إنها حركة ذهاب وإياب مثل حركة البندول البسيط والجسم المعلق بنابض.

الحركة التوافقية البسيطة : هي حركة جسم على خط مستقيم بتعجيل يتناسب طرديا مع إزاحته عن نقطة ثابتة تمثل موضع توازنه واتجاهه دائما متجها نحو تلك النقطة (أي موضع الاستقرار).

شروط الحركة التوافقية البسيطة

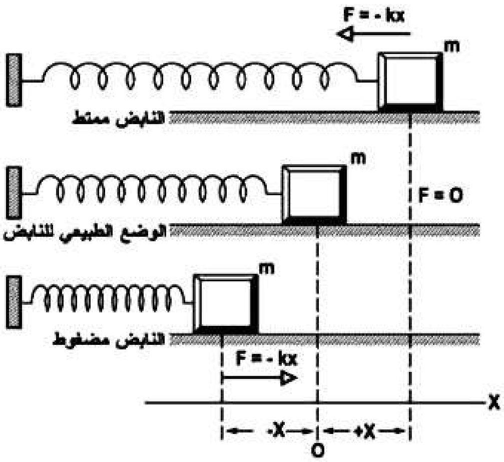
1- إن يكون مسار الجسم على خط مستقيم يمر بنقطة ثابتة تمثل موضع استقراره.

2- إن مقدار تعجيل الجسم يتناسب طرديا مع مقدار إزاحته عن موضع التوازن ، أي أن هناك قوة تدعى القوة المعيدة تحاول إعادة الجسم لموضعه الأصلي.

3- إن اتجاه تعجيل الجسم يكون دائما متجها نحو التوازن .

معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة

إذا كان لدينا جسم كتلته m يتحرك علي سطح أفقي أملس بسبب تأثير نابض مربوط بالجسم كما في الشكل أدناه وقد أزيح الجسيم إزاحة آنية طفيفة مقدارها x من موضع التوازن وضمن حدود المرونة فان القوه التي تحاول إرجاع الجسم إلى موضع توازنه تدعى (قوة المعيدة)



من قانون هوك $F=- k x$ ....(1)

حيث k تمثل ثابت المرونة والإشارة السالبة تشير إلى إن اتجاه القوة يعاكس اتجاه زيادة الإزاحة.

وبتطبيق قانون نيوتن الثاني للجسيم المتحرك والذي ينص على (محصلة القوى المؤثرة في الجسيم ΣF يساوي حاصل ضرب كتلته m في التعجيل a)

$$\Sigma F= ma \quad ......(2)$$

وبما إن محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز هي

$$\Sigma F= -k x$$

من المعادلة (2) نحصل على

$$\Sigma F= m \frac{d2_x}{dt^2} \quad ....(3)$$

$$-k x = m \frac{d2_x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d2_x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \quad ......(4)$$

وإذا فرضنا إن $\frac{k}{m} = w_{\circ}$ حيث إن $w_{\circ}$ هي مقدار ثابت تمثل فيزياويا التردد الزاوي للمهتز وبالتالي

$$\frac{d2_x}{dt^2} = -w_{\circ} x \quad .....(5)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تدعى بمعادلة الحركة التوافقية البسيطة.

حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة

لحل معادلة الحركة التوافقية البسيطة يجب إن نفرض معادلة مشابهة لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة إذا علمنا الشروط الابتدائية للحركة عند بدء الحركة t=0

$$X = A \sin \alpha t \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

حيث A يمثل ثابتا اختياريا ، α يمثل ثابت تحويل الزمن إلى زاوية

$$\frac{dx}{dt} = A\alpha \cos \alpha t \qquad \Rightarrow \frac{d2_x}{dt^2} = -\alpha^2 \sin at$$

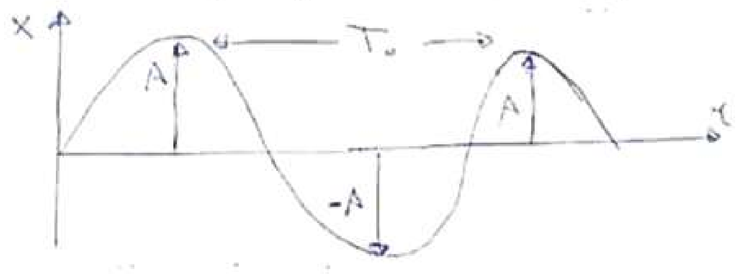
وبالتعويض عن x وعن $\frac{d2_x}{dt^2}$ في المعادلة (5) ينتج

$$-\alpha^2 \sin \alpha t = -w_\circ A \sin \alpha t$$

وبتساوي الطرفين يكون $\alpha = w_\circ$ وتكون المعادلة (6) كالآتي:

$$X = A \sin w_\circ t \ldots\ldots (7)$$

وتمثل الحل الخاص لمعادلة الحركة التوافقية بتطبيق الشروط الابتدائية إن هذا الحل يشير إلى إن الحركة الخطية التوافقية هي جيب يمكن تمثيلها بالمنحني الجيبي



والحل أعلاه يحتوي على ثابت اختياري واحد لذلك يمثل حل خاص وليس حلا كاملا لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حيث من المعلوم إن الحل العام لمثل هذا النوع من المعادلات يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين، لذلك هناك حل آخر للمعادلة التفاضلية للمركبة الخطية التوافقية هو

$$X = B \cos b\, t \ldots\ldots (8)$$ H.W

بأخذ المشتقة الأولى والثانية للمعادلة (8) نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = -bB\sin bt \ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b^2 \, B\cos bt \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

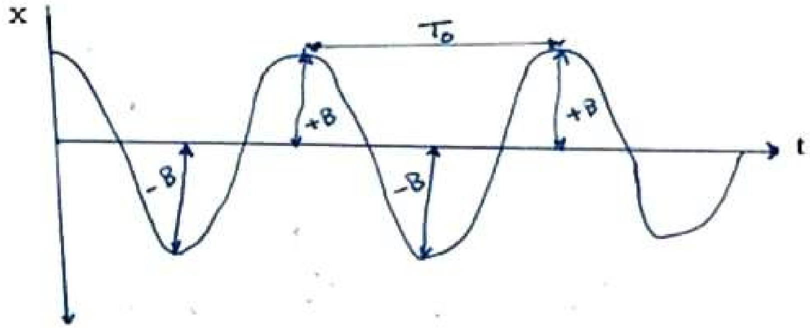
وبتعويض المعادلتين(8,10) في معادلة (5) نحصل على

$$-b^2 \, B \cos b\, t = -w_\circ^{\,2} \, B \cos b\, t$$

$w_{\circ}^{2} = b$

$\Rightarrow \ \boldsymbol{X = B \cos w_{\circ} t ....(11)}$

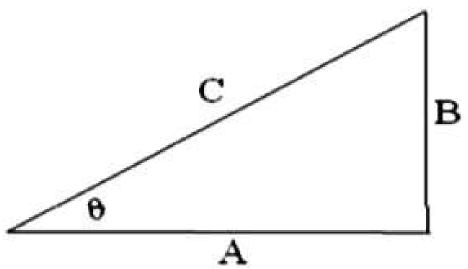
إن هذا الحل يمثل حلا خاصا لان يحتوي على ثابت اختياري واحد ويمكن تمثيله بمنحني الجيب تمام



ولما كانت المعادلتين (7,11) مستقلتين عن بعضهما البعض وكل منهما يمثل حلا خاصا يختلف عن الآخر لذلك يمكن اعتبار مجموع هذين المعادلتين حلا آخر للمعادلة (5) وبذلك يصبح

$X(t) = A \sin w_{\circ} t + B\cos w_{\circ} t......(12)$

إن هذا الحل يحتوي على ثابتين A,B لذلك يمكن اعتباره حلا عاما وكاملا للمعادلة التفاضلية للحركة الخطية التوافقية البسيطة، ويمكن تبسيط هذا الحل بفرض إن A,B يمثلان طول ضلعين مثلثين قائمين في مثلث قائم الزاوية طول وتره C كما في الشكل أدناه



حيث إن $C^2 = A^2 + B^2$

وبضرب الطرف الأيمن من المعادلة(12) والقسمة على C نحصل على

$$X(t) = C\left[\frac{A}{C}\sin w_{\circ} t + \frac{B}{C}\cos w_{\circ} t\right]$$

من المثلثات لدينا

$\sin \theta = \frac{B}{C}$, $\cos \theta = \frac{A}{C}$, $\tan \theta = \frac{B}{A}$

$$X(t) = C\sin(w_{\circ} t + \theta)$$

هذه المعادلة تمثل حلا عام لمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لأنها تتضمن ثابتين اختياريين هما C,θ.

X : تمثل الإزاحة الخطية الآنية من موضع التوازن في الزمن t

C: تمثل سعة الاهتزاز وهي أقصى قيمة للإزاحة من موضع التوازن

$w_{\circ}$: تمثل التردد الزاوي $=\sqrt{\frac{k}{m}}$ حيث

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

تدل الزاوية $(wt+\theta)$ على الطور الآني أو الطور الذي يحدد حالة الجسم المهتز في أي لحظة .

θ : تمثل الطور الابتدائي لحركة الجسيم ، أي تحدد موضع الجسم عندما $t=0$ حيث

$$\theta = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

وحدة الطور هي زاوية نصف قطرية

لو عوضنا عن θ و W بما يساويها فان:

$$X(t) = A\sin(2\pi f\, t - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$X(t) = A\sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

فإذا كان K (ثابت الانتشار) $= \frac{2\pi}{\lambda}$ ، وعليه

معادلة الإزاحة

$$X(t) = A\sin(wt - kx)$$

كما إن $\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 A\sin(wt - kx)$

وتوضح معادلة التعجيل إن القوة المؤثرة على جسم ستؤدي إلى إزاحته في اتجاه معاكس وهذا يؤكد إن الجسم سيقوم بحركة اهتزازية بسيطة زمنها الدوري هو :