جامعة تكريت ـ كلية التربية للبنات ـ قسم الرياضيات

ـ المرحلة الأولى

ـمادة الفيزياء الجامعية

ـ المتجهات(ج2)

ـأ.م.د. سروة عبدالقادر محمد صالح

srwa.muhammad@tu.edu.iq

مثال:

$$\vec{A} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

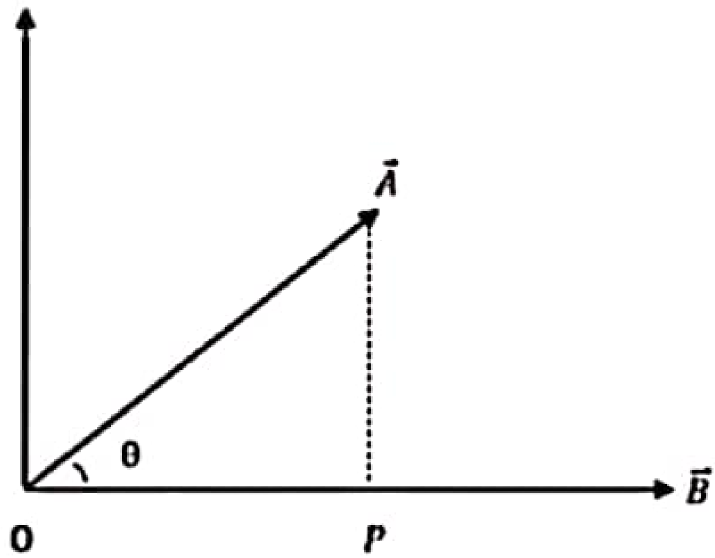
$$\vec{B} = \vec{3i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$C = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

احسب المتجه $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ والمتجه $\vec{M} = \vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C}$

1.3 تحليل المتجهات Resolution of Vectors

تحليل مركبات أي متجه باتجاه متجه اخر يعني إيجاد مساقط المتجه نسبة الى المتجه الاخر في اتجاه محدد نلاحظ الشكل التالي.

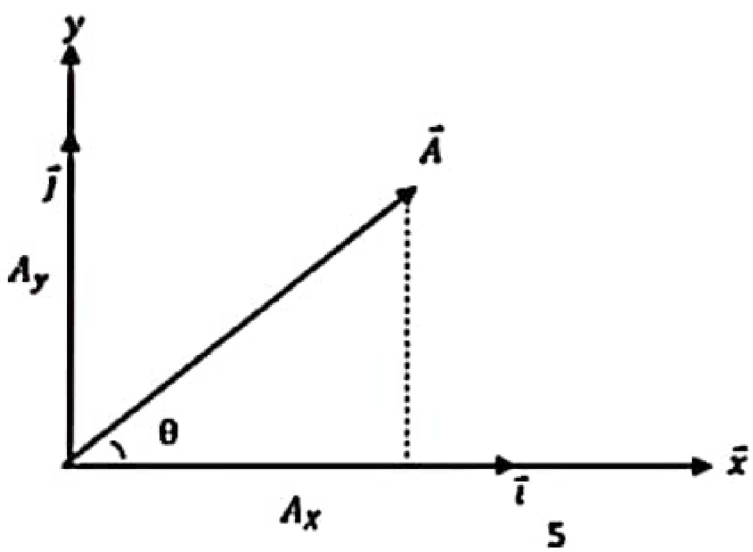


أي ان مسقط المتجه $\vec{A}$ على $\vec{B}$ هي المسافة OP ويكون مسقط المتجه موجبا باتجاه $+\vec{B}$ وسالبا باتجاه $-\vec{B}$

$$A_B = A\cos(\theta) \qquad \ldots\ldots (8)$$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

لتحليل المتجه في المستوي xy



$$=\vec{i}C_x + \vec{j}C_y + \vec{k}C_z$$

مثال: -اذا كان

$$\vec{A} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$$

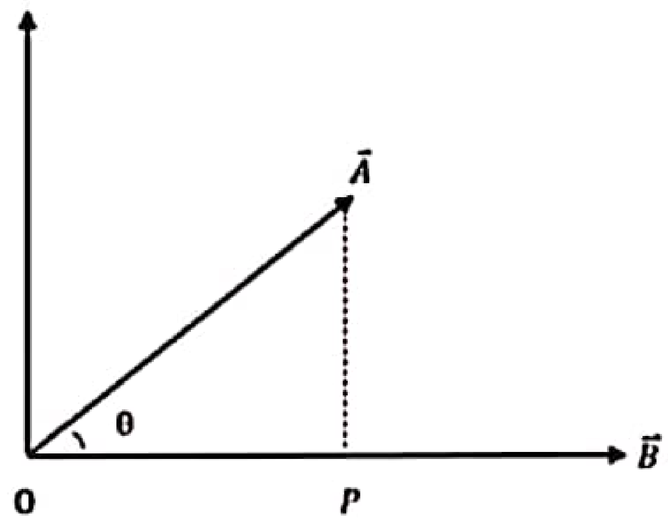
$$\vec{B} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$C = \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

احسب المتجه $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$ والمتجه $\vec{M} = \vec{A} - 2\vec{B} + \vec{C}$

1.3 تحليل المتجهات Resolution of Vectors

تحليل مركبات أي متجه باتجاه متجه اخر يعني إيجاد مساقط المتجه نسبة الى المتجه الاخر في اتجاه محدد نلاحظ الشكل التالي.

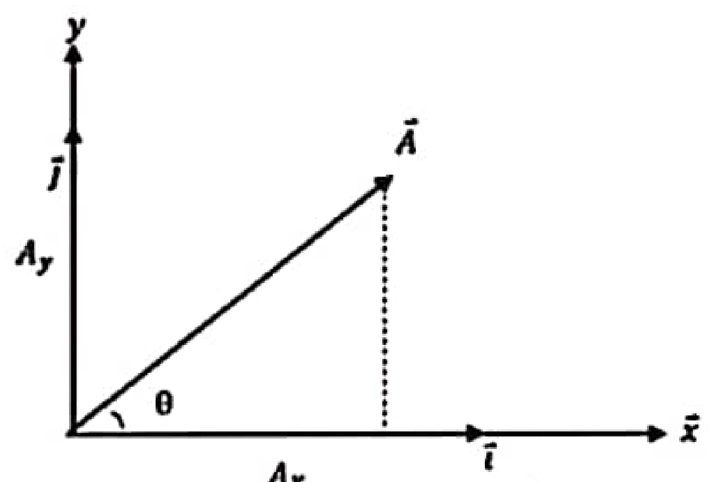


أي ان مسقط المتجه $\vec{A}$ على $\vec{B}$ هي المسافة OP ويكون مسقط المتجه موجبا باتجاه $+\vec{B}$ وسالبا باتجاه $-\vec{B}$

$$A_B = A\cos(\theta) \qquad \ldots\ldots (8)$$

حيث θ هي الزاوية المحصورة بين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

لتحليل المتجه في المستوي xy



1.4 ضرب المتجهات: Vector Multiplication

يوجد نوعان من ضرب المتجهات هما الضرب العددي والضرب الاتجاهي:

1- الضرب العددي: Dot product or scalar product

وهو الضرب الذي ينتج منه كمية عددية ويعبر عنه رياضياً

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos(\theta)_{AB} \qquad ...... (14)$$

حيث $(\theta)_{AB}$ هي الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

لحسب الضرب العددي لكل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اذا كان

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\vec{B} = \vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = (\vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z).(\vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z)$$

$$= A_XB_X + A_yB_y + A_zB_z$$

حصلنا على النتيجة السابقة من خلال استخدام خصائص الضرب العددي

$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ متوازيان $(\theta = 0)$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$ متعامدان $(\theta = 90)$

مثال: اثبت قانون الجيب تمام عند جمع متجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ؟

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|cos(\theta)_{AB}$$

الحل:

لنفرض المتجه

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{C} = (\vec{\imath}A_X + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z) + (\vec{\imath}B_X + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z)$$

$$= \vec{\imath}(A_X + B_X) + \vec{\jmath}(A_y + B_y) + \vec{k}(A_z + B_z)$$

$$= \vec{\imath}(C_X) + \vec{\jmath}(C_y) + \vec{k}(C_z)$$

اذن

$$C_X = A_X + B_X \quad \& \quad C_y = A_y + B_y \quad \& \quad C_z = A_z + B_z$$

$$C^2 = (A_X + B_X)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2$$

$$= (A_X + A_y + A_z)^2 + (B_X + B_y + B_z)^2 + 2(A_XB_X + A_yB_y + A_zB_z)$$

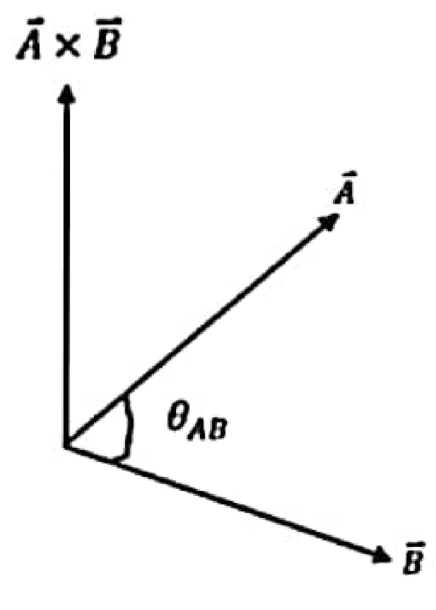
$$= A^2 + B^2 + 2\vec{A}.\vec{B}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|cos(\theta)_{AB}$$

1- الضرب العددي: Cross product

وهو الضرب الذي ينتج منه كمية اتجاهية ويعبر عنه رياضياً

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|sin(\theta)_{AB}\hat{u} \qquad ...... (15)$$



حيث ان $\hat{u}$ وحدة المتجه $\vec{A} \times \vec{B}$ ويكون عمودي على كل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ ويحدد اتجاهه حسب قاعدة اليد اليمن (وضع اليد بموازاة احد المتجهين وتدويرها باتجاه المتجه الاخر فأن الابهام يشير الى اتجاه المتجه $(\vec{A} \times \vec{B})$.

لحسب الضرب الاتجاهي لكل من المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ اذا كان

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

$$\vec{B} = \vec{\imath}B_x + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (\vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z) \times (\vec{\imath}B_x + \vec{\jmath}B_y + \vec{k}B_z)$$

$$= (\vec{\imath} \times \vec{\imath}A_xB_x + \vec{\jmath} \times \vec{\jmath}A_yB_y + \vec{k} \times \vec{k}A_zB_z) + \vec{\imath} \times \vec{\jmath}A_xB_y +$$
$$\vec{\imath} \times \vec{k}A_xB_z + \vec{\jmath} \times \vec{\imath}A_yB_x + \vec{\jmath} \times \vec{k}A_yB_z + \vec{k} \times \vec{\imath}A_zB_x + \vec{k} \times \vec{\jmath}A_zB_y$$

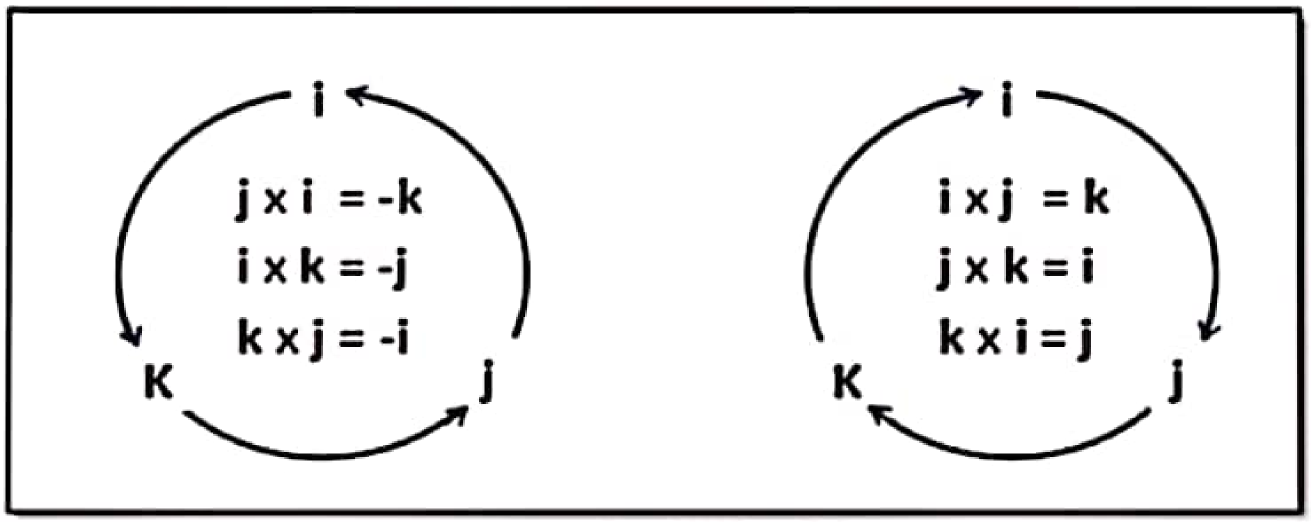
$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{\imath}(A_yB_z - A_zB_y) + \vec{\jmath}(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

حصلنا على النتيجة السابقة من خلال استخدام خصائص الضرب الاتجاهي

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \longrightarrow (\theta = 0)$$

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \;\; \& \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath} \;\; \& \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}$$

$$\vec{\jmath} \times \vec{\imath} = -\vec{k} \;\; \& \vec{k} \times \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \;\; \& \vec{\imath} \times \vec{k} = -\vec{\jmath}$$



اتجاه عكس عقارب الساعة　　　　اتجاه عقارب الساعة

ويمكن كتابة $\vec{A} \times \vec{B}$ باستخدام المحددات

$$\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{\jmath}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

مثال1: إذا كان المتجهين $\bar{A} = 2i + 4j - 5k$ و $\bar{B} = -i + 2j + 6k$ احسب:

1- |A| , |B| 2- A-B , A+B 3- A.B 4- A×B 5- θ between A and B

مثال2: يوصف المتجهان بالإحداثيات المتعامدة $\bar{A} = iA_x + jA_y + kA_z$ و $\bar{B} = iB_x + jB_y + kB_z$ ، برهن بان الضرب العددي بين المتجهين يعطى بالعلاقة:

$$A.B = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

مثال 3: إذا علمت ان المتجهين

$$\vec{a} + \vec{b} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k} \quad \& \quad \vec{a} - \vec{b} = 2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$$

احسب الزاوية بين بين المتجهين $\vec{a}$ & $\vec{b}$ ؟

مثال4: إذا علمت ان المتجهين $\vec{A}$ & $\vec{B}$ متعامدان حيث

$$\vec{A} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 3\hat{k} \quad \& \quad \vec{B} = 4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \beta\hat{k}$$

احسب قيمة β ؟