اسم المادة : أسس رياضيات　　　　　　　اسم التدريسي : أستاذ مساعد رنا بهجت

المرحلة : الأولى　　　　　　　محاضرة: العمليات على المجموعات

العمليات على المجموعات

- **المجموعات المتساوية :**

يقال لمجموعتي A, B متساويتان اذا وفقط اذا احتويتا على نفس العناصر وبعبارة اخرى $A = B$ تكافي $A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A$

مثال : لتكن $A = \{x \in \mathbb{Z}: -2 \leq x \leq 2\}$ و $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ فان $A = B$.

ويقال للمجموعتان A, B غير متساويتين اذا وجد على الاقل عنصر واحد في احدى المجموعتين لاينتمي الى المجموعة الاخرى .

- ***الاتحاد***:

لتكن A, B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في اي منها تسمى اتحاد المجموعتين A, B ويرمز له بالرمز $A \cup B$

وكما يلي $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

- **التقاطع** :　　　　The intersection

لتكن A, B مجموعتين فان المجموعة التي تتكون من جميع العناصر الموجودة في كل من A, B معا تسمى بتقاطع المجموعتين A, B ويرمز له بالرمز $A \cap B$

وكما يلي $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

- اذا كانت مجموعة تقاطع المجموعتين A, B مجموعة خالية فيقال ان A, B منفصلتنان (Disjoint)

مثال : لتكن　　　　$A = \{10, 5, 3\}$

$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ فان $A \neq B$. و

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 10\}$$

ولتكن $E = [0,3]$ فان $E \cap B = \{0, 1, 2\}$.

نلاحظ من المثال أعلاه بان ا) $A \subseteq A \cup B \wedge B \subseteq A \cup B$

ب) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

س) $A \cap (E \cup B) = (A \cap E) \cup (A \cap B)$ و

$$A \cup (E \cap B) = (A \cup E) \cap (A \cup B)$$

- **الفرق بين المجموعات** :

لتكن كل من A, B مجموعتين تسمى المجموعة التي عناصرها هي جميع العناصر التي تنتمي الى ولاتنتمي الى بالفرق بين المجموعتين A, B ويرمز له بالرمز $A - B$

وكما يلي $A - B = \{x: x \in A \land x \notin B\}$

والمجموعة $B - A$ تعرف كالاتي :

$$B - A = \{x: x \notin A \land x \in B\}$$

- **متممة المجموعة** :

لتكن A مجموعة جزيئة من المجموعة الشاملة U فالمجموعة التي عناصرها من المجموعة الشاملة والتي لا تنتمي الى A ويرمز لها بالرمز A^C

أي أن $A^C = \{x: x \in U \land x \notin A\}$

فمثلا : لتكن $U = \{1,,2,3,\dots,10\}$ و $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,3,5\}$ فان

$$B^C = \{2,4,6,7,8,9,10\}$$
$$A^C = \{1,3,5,7,8,9,10\}$$

$$(A^c)^c = \{1,3,5\} = A$$

نلاحظ ان 1. لتكن كل من A, B مجموعة اذا كان $A \subseteq B$ فان $A^c \subseteq B^c$.

2. لتكن A مجموعة ما فان

$$(A^c)^c = A$$

- **الفرق التناظري** :

لتكن كل من A, B مجموعتين فان الفرق التناظري للمجموعتين A, B هي مجموعة اتحاد المجموعتين $B - A$ و $A - B$ ويرمز له بالرمز $A \Delta B$ (تقرا A دلتا B) . اي ان $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

لتكن كل من A, B مجموعتين فان

$$A \Delta \emptyset = \emptyset$$
$$A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$$

نظرية : قانون دي موركن

أذا كان كل من A, B مجموعة فان

1. $(A \cup B)^c = A^C \cap B^C$

<u>البرهان</u> : نفرض أن

$x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A^C \wedge x \in B^C \Rightarrow x \in A^C \cap B^C$

اذن $(A \cup B)^c \subseteq A^C \cap B^C$ ---1

وبصورة معاكسة نفرض ان

$y \in A^C \cap B^C \Rightarrow y \in A^C \wedge y \in B^C$

$\Rightarrow y \notin A \wedge y \notin B \Rightarrow y \notin A \cup B \Rightarrow y \in (A \cup B)^c$

$A^C \cap B^C \subseteq (A \cup B)^c ----2$

نحصل من 1و2 على ان

$(A \cup B)^c = A^C \cap B^C$

.2 $(A \cap B)^c = A^C \cup B^C$

<u>البرهان</u> : نفرض أن

$y \in A^C \cup B^C \Rightarrow y \in A^C \vee y \in B^C$

$\Rightarrow y \notin A \vee y \notin B \Rightarrow y \notin A \cap B \Rightarrow y \in (A \cap B)^c$

$A^C \cup B^C \subseteq (A \cap B)^c ----1$

وبصورة معاكسة نفرض ان

$x \in (A \cap B)^c \Rightarrow x \notin A \cap B$

$\Rightarrow x \notin A \vee x \notin B \Rightarrow x \in A^C \vee x \in B^C \Rightarrow x \in A^C \cup B^C$

اذن $(A \cup B)^c \subseteq A^C \cap B^C$ ---2

نحصل من 1و2 على ان $(A \cap B)^c = A^C \cup B^C$.