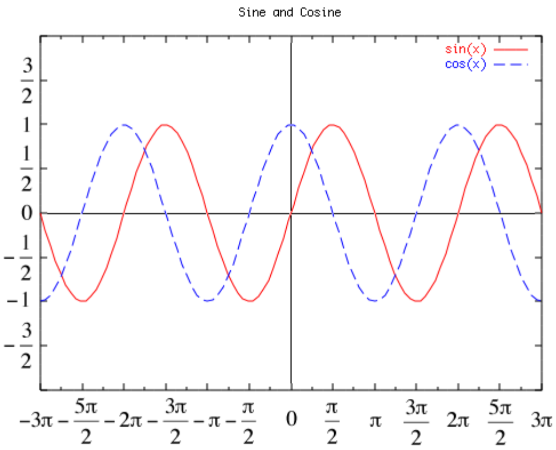
متسلسلة فورير Fourier Series

Periodic Functions: الدوال الدورية:

الدالة $f(x)$ يقال أن لها دورة T اذا كانت لجميع قيم x فان $f(x+Tn) = f(x)$ حيث T مقدار ثابت موجب (T>0). مثلاً جميع الدوال المثلثية لها دورة $T = 2\pi$ لذلك فإن:

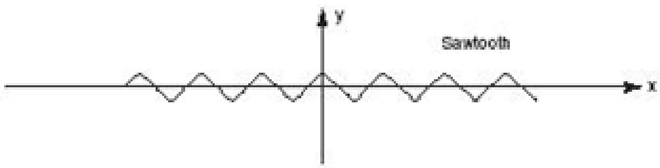
1. $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$

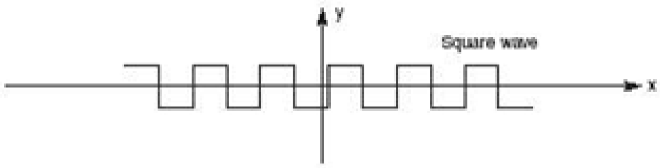
   $\cos(x + 2n\pi) = \cos x \quad , n = 0,1,2,3, \ldots$

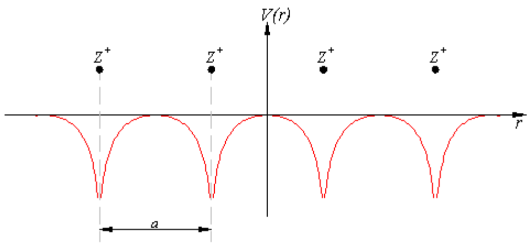


2. الدورة للدالة $\tan x$ هي π.
3. الثابت له أي عدد موجب كدورة.

الأشكال أدنها توضح بعض الدوال الدورية:







Fourier Series: متسلسلة فورير:

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $(-L,L)$ وخارج هذه الفترة بالعلاقة: $f(x + 2L) = f(x)$ أي أن الدالة $f(x)$ لها دورة $T=2L$. فأن متسلسلة فورير المناظرة للدالة $f(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \qquad (1)$$

حيث أن a_n, b_n تعرف بمعاملات فورير Fourier Coefficients وتعطى بالعلاقة:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right\} n = 1,2,3,\ldots \qquad (2)$$

إذا كانت $f(x)$ لها دورة $2L$ فإن المعاملات a_n, b_n يمكن تحديدها بتكافؤ من العلاقتين:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right\} n = 1,2,3,\ldots \qquad (3)$$

حيث c عدد حقيقي. وفي الحالة الخاصة عندما $c=-L$ فأن (3) تصير (2). ولتحديد a_0 في (1) نستخدم (2) أو (3) حيث تكون $n=0$ وعليه فإن (2) تعطي:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

مع ملاحظة أن هذا الحدّ الثابت في (1) يكون مساوياً للمقدار

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

والذي هو متوسط الدالة $f(x)$ على الدورة.

ملاحظة:

إذا كانت $L = \pi$ فان المتسلسة (1) والمعاملات في (2)، (3) تكون بسيطة. ودورة الدالة في هذه الحالة هي 2π .

شروط ديريشلت: **Dirichlet Conditions**:

إذا تحققت الشروط التالية:

(i) $f(x)$ معرفة ووحيدة القيمة في الفترة $(-L,L)$.

(ii) $f(x)$ تكون دورية خارج الفترة $(-L,L)$ بدورة $2L$.

(iii) $f(x), f'(x)$ تكونان مستمرتان مقطعياً piecewise continuous في الفترة $(-L,L)$.

حينئذٍ فإن المتسلسلة (1) تتقارب إلي:

1) الدالة $f(x)$ إذا كانت x هي نقطة الإستمرار.

2) $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ إذا كانت x هي نقطة عدم الإستمرار.

الشروط $(i), (ii), (iii)$ تسمي شروط ديريشلت المفروضة على الدالة $f(x)$ وهي شروط كافية ولكن ليست ضرورية. ويعني هذا أن الاستمرار للدالة ليست وحدها تضمن تقارب متسلسلة فوريير.

نتيجة:

$$(i)\ \int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0\ , & m \neq n \\ L\ , & m = n \end{cases}$$

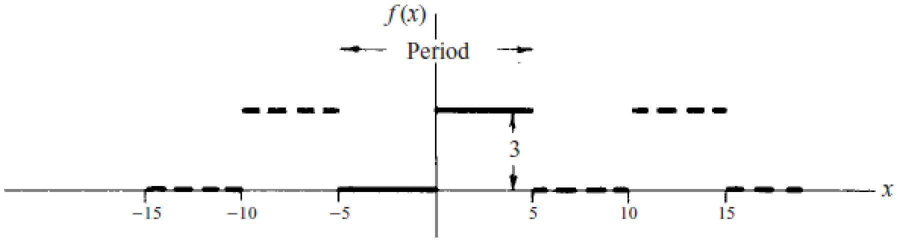
$$(ii)\ \int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

مثال(1):

جد متسلسلة فوريير للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & -5 < x < 0 \\ 3\ , & 0 < x < 5 \end{cases}$$

الحل:



T=10=2L, L=5

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}dx + \int_{0}^{5}(3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right] = \frac{3}{5}\left[\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right]_{x=0}^{5} = 0, if\ n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{(0)\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}dx = 3, \qquad if\ n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{L}dx + \int_{0}^{5}(3)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right] = \frac{3}{5}\left[\frac{-5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right]_{0}^{5} = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

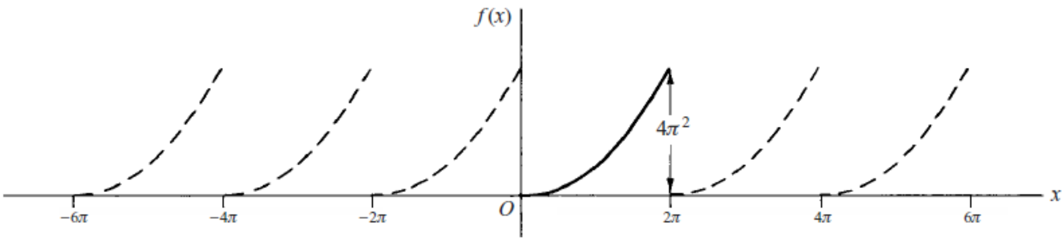
$$\therefore f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

مثال(2):

جد مفكوك $f(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ بمتسلسلة فوريير.

الحل:



T=2L=2π,   L=π,   let c=0

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n} + 2x\frac{\cos nx}{n^2} - 2\frac{\sin nx}{n^3}\right]_{x=0}^{2\pi} = \frac{4}{n^2}, n \neq 0$$

If $n = 0$, $\quad \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2 \sin\, nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-x^2\frac{\cos nx}{n} + 2x\frac{\sin nx}{n^2} + 2\frac{\cos nx}{n^3}\right]_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

$$f(x) = x^2 \approx \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right) \qquad (i)$$

هذه المتسلسلة صحيحة عندما $0 < x < 2\pi$ وعند x=0 و x=2π فان المتسلسلة تتقارب الي $2\pi^2$.

مثال(3):

مستخدماً المثال السابق أثبت أن: $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$.

الحل:

Substitute x=0 in (i) then ⇒

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

من شروط ديريشلت فان المتسلسلة تتقارب عند $x=0$ الي المقدار $\frac{1}{2}(0+4\pi^2)$ وعليه فإن:

$$\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 2\pi^2 \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ملاحظة:

إن متسلسلة ماكلورين Maclaurin Series لتقريب الدالة $f(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots$$

وعليه فإن متسلسلتي الجيب وجيب التمام تعطى بدلالة متسلسلة ماكلورين Maclaurin Series كالآتي:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

متسلسلة نصف المدى (جا) و (جتا) فوريير: Sine and Cosine Fourier Series:

نصف مدى متسلسلة جا أو جتا فوريير هي متسلسلة فيها فقط حدود جا أو فقط حدود جتا موجودة على الترتيب. إذا كان المطلوب متسلسلة نصف المدى المناظرة لدالة معطاه، فإن الدالة غالباً تعرف في الفترة $(0,L)$ وحينئذٍ تكون الدالة قد وصفت كفردية أو زوجية بحيث أن تكون معرفة بوضوح في النصف الثاني من الفترة، أي $(-L,0)$ في مثل هذه الحالة يكون لدينا:

(i) عندما تكون متسلسلة نصف المدى (جا):

$$a_n = 0, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sin\,\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (4)$$

(ii) عندم تكون متسلسلة نصف المدى (جتا):

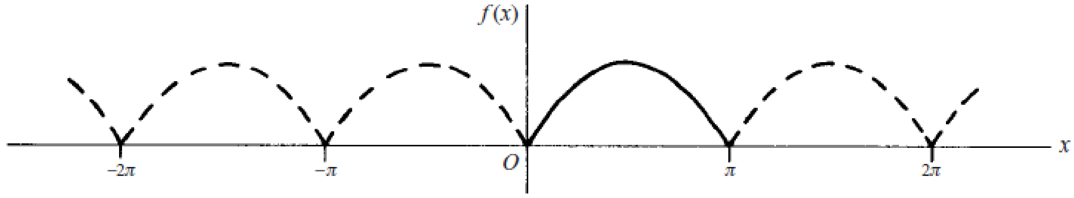
$$b_n = 0, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (5)$$

مثال(1):

جد مفكوك $f(x) = \sin x\ ,\ 0 < x < \pi$ في صورة متسلسلة جتا فوريير.

الحل:

$L=\pi,\quad b_n=0 \quad \Rightarrow$



$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n+1)x+\sin(1-n)x\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1+\cos n\pi}{n+1}-\frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right]=\frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)}\ ,n\neq 1$$

If $n=1$

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin^2 x}{2}\right]_0^\pi=0$$

If $n=0$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx=\frac{2}{\pi}[-\cos x]_0^\pi=\frac{4}{\pi}$$

$$\therefore f(x)\approx\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1}+\frac{\cos 4x}{4^2-1}+\frac{\cos 6x}{6^2-1}+\cdots\right)$$

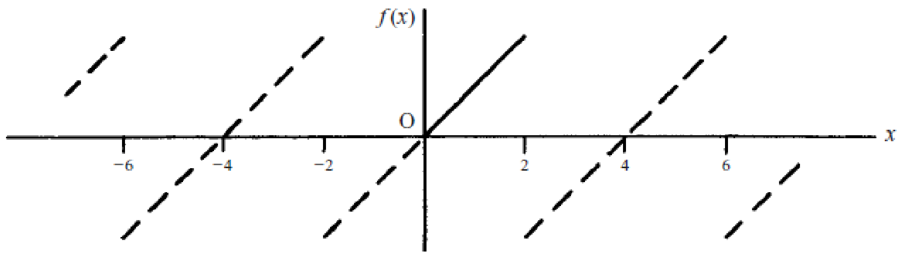
مثال(2):

أوجد مفكوك $f(x)=x\ ,\ 0<x<2$ في نصف مدى :

(i) متسلسلة جا فوريير $\qquad$ (ii) متسلسلة جتا فورييه

الحل:

(i) بتوسع التعريف للدالة المعطاه لتلك الدالة الفردية التي دورتها 4 يسمى هذا أحياناً التمديد الفردي odd extension للدالة $f(x)$ حينئذٍ فإن $2L=4$ و عليه فإن $L=2$



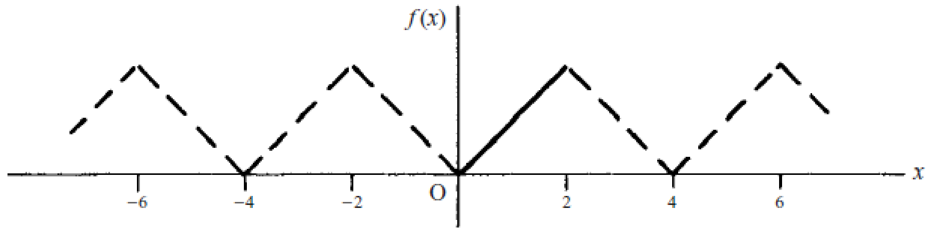
$\because\ a_n=0\ \Rightarrow$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

$$= \left[x \left(\frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) - (1) \left(\frac{-4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_0^2 = \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi$$

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{n\pi x}{2}$$

(ii) بتوسيع التعريف للدالة *f(x)* للدالة الزوجية التي دورتها 4 وهذا هو التمديد الزوجي للدالة *f(x)*.
إذن فإن $2L=4$ وعليه فإن $L=2$



$$\because\ b_n = 0 \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx$$

$$= \left[x \left(\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) - (1) \left(\frac{-4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_0^2 = \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1), \qquad n \neq 0$$

If n=0 then

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx = \frac{2}{2} \int_0^2 x dx = 2$$

$$f(x) \approx 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1) \cos \frac{n\pi x}{2}$$

Parseval's Identity: **متطابقة بارسيفال**:

إذا كانت *f(x)* دالة تحقق شروط ديريشلت فإن:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \qquad (6)$$

تسمى العلاقة (6) بمتطابقة بارسفال. حيث أن a_n, b_n هي معاملات فورير المناظرة للدالة *f(x)*.

الإثبات:

لإثبات العلاقة (6):

$$\because\ f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

بالضرب في *f(x)* والتكامل حداً حداً من *–L* الي *L* نجد أن:

$$\int_{-L}^{L} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right]$$

$$= \frac{{a_0}^2}{2} L + L \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\therefore \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}[f(x)]^2dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

مثال:

أكتب متطابقة بارسفال لمتسلسلة فورييرمن المثال السابق *(ii)* ومن ثم أوجد مجموع:

$$S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots$$

الحل:

$$\because L = 2, \qquad a_0 = 2, \ \ a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1), \ \ n \neq 0\,, \qquad b_n = 0$$

$$\therefore \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}[f(x)]^2dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx = \frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4\pi^4}(\cos n\pi - 1)^2$$

$$Or \ \ \frac{8}{3} = 2 + \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \Rightarrow \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}$$

$$S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots = \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots\right) = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16}$$

<u>المتسلسلة الأسية</u>: <u>Exponential Series</u>:

بإستخدام صيغة أويلر للعدد المركب:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta\,, \qquad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ \cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right), \qquad \sin\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)$$

فإن متسلسلة فورييريمكن أن تكتب على الصورة:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L} \qquad (7)$$

حيث أن:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-jn\pi x/L}dx$$

عند كتابة (7) نكون مفترضين أن شروط ديريشلت متحققة وكذلك تكون الدالة *f(x)* مستمرة عند *x*. اما إذا كانت الدالة *f(x)* غير مستمرة عند *x* فان الطرف الأيسر من (7) يجب أن يستبدل بالمقدار $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

<u>مسائل</u>

1. أرسم بيان كل من الدوال الأتية:

$$(i) \ \ f(x) = \begin{cases} 3\,; & 0 < x < 5 \\ -3\,; & -5 < x < 0 \end{cases} \qquad \& \, period = 10$$

$$(ii) \ \ f(x) = \begin{cases} \sin x\,; & 0 \le x \le \pi \\ 0\,; & \pi \le x \le 2\pi \end{cases} \qquad \& \, period = 2\pi$$

$$(iii) \ \ f(x) = \begin{cases} 0\,; & 0 \le x < 2 \\ 1\,; & 2 \le x < 4 \\ 0\,; & 4 \le x < 6 \end{cases} \qquad \& \, period = 6$$

2. جد مفكوك متسلسلة فورييرللدوال الآتية:

$$(i) \qquad f(x) = \begin{cases} 2 - x\,; & 0 < x < 4 \\ x - 6\,; & 4 < x < 8 \end{cases} \qquad \& \, T = 8$$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x+2\,; & -2 < x < 0 \\ 1 \quad ; & 0 < x < 2 \end{cases}$ $\quad \& \; T = 4$

(iii) $f(x) = \begin{cases} -k\,; & -\pi < x < 0 \\ k \quad ; & 0 < x < \pi \end{cases}$ $\quad \& \; T = 2\pi$

(iv) $f(x) = \begin{cases} x+1\,; & -1 \le x < 0 \\ 1-x\,; & 0 \le x \le 1 \end{cases}$ $\quad \& \; T = 2$

(v) $f(x) = 1 - x^2\,;\ -1 \le x \le 1$

3. جد مفكوك جا فوريير للدالة: $f(x) = \cos x\ ; 0 < x < \pi$.

4. جد مفكوك جا فوريير وجتا فوريير للآتي:

(i) $f(x) = \begin{cases} x \quad ; & 0 < x < 4 \\ 8-x\,; & 4 < x < 8 \end{cases}$

(ii) $f(x) = 2 - x\,;\ \ 0 < x \le 2$

(iii) $f(x) = e^x\ ;\ \ 0 < x < 2$

(iv) $f(x) = x^2\ ;\ \ 0 \le x < 1$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

where:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{When } n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & \text{When } n < 0 \\ a_0 & \text{When } n = 0 \end{cases}$$