جامعة تكريت
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات

محاضرة بعنوان
(الحلقة والحلقة التامة)

اعداد الأستاذة:
م. ندى جاسم محمد

١. الحلقة (Ring)

تعريف (١-١-١)

لتكن R مجموعة ما غير خالية، ولتكن (+) و (.) عمليتين جبريتين ثنائيتين معرفتين على R. نقول عن الثلاثية (.,+,R) انها حلقة بالنسبة للعمليتين (+) و (.) اذا تحققت الشروط التالية:

١- (+,R) زمرة ابدالية (Abelian group)

أ- الانغلاقية $a+b \in R,\ for\ all\ a,b \in R$

ب-عملية تجمعية

$$a+(b+c)=(a+b)+c,\ for\ all\ a,b,c \in R$$

ت-عنصر محايد، يوجد عنصر محايد الجمعي $0 \in R$ بحيث ان لكل $a \in R$ فأن

$$a+0=a=0+a$$

ث- معكوس، لكل $a \in R$ يوجد لها معكوس $-a \in R$ بحيث ان

$$a+(-a)=0=(-a)+a$$

ج- العملية ابدالية $a+b=b+a,\ for\ all\ a,b \in R$

٢- (.,R) شبه زمرة (نصف زمرة) (Semigroup)

أ- الانغلاقية $a.b \in R,\ for\ all\ a,b \in R$

ب- عملية تجمعية $a.(b.c)=(a.b).c,\ for\ all\ a,b,c \in R$

ت-عنصر محايد، يوجد عنصر محايد الضربي $1 \in R$ بحيث ان لكل $a \in R$ فأن

$$a.1 = a = 1.a$$

٣- العملية (.) توزيعية (Distributive) على عملية الجمع (+) من اليمين واليسار.

$$a.(b+c) = (a.b) + (a.c), \qquad for\ all\ a,b,c \in R$$

$$(a+b).c = (a.c) + (a.c), \qquad for\ all\ a,b,c \in R$$

اذا كانت (.) بالاضافة الى الشروط السابقة، عملية ابدالية على عناصر المجموعة R، فاننا نقول ان الحلقة $(R,+,.)$ هي حلقة ابدالية *Commutative ring*

٤- حلقة ابدالية

$$a.b = b.a, \ \ for\ all\ a,b \in R$$

تعريف (١-١-٢):

تسمى الحلقة $(R,+,.)$ ذات عنصر محايد (*Ring with identity*) اذا وجد في المجموعة R عنصر محايد بالنسبة لعملية (.) فاننا نقول عن هذا العنصر انه عنصر وحدة في الحلقة $(R,+,.)$ وسنرمز له بالرمز *1* اي ان : لكل $a \in R$ فأن $1.a=a.1=a$

تعريف (١-١-٣):

العنصر y في الحلقة R يسمى معكوس العنصر $x \in R$ اذا كان : $x.y = x.y = 1$

أمثلة (١-١-٤):

١- المجموعات العددية التالية : Z (مجموعة الاعداد الصحيحة)، Q (مجموعة الاعداد النسبية الكسرية)، R (مجموعة الاعداد الحقيقية)

تشكل حلقة ابدالية وبمحايد بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب العاديتين.

اي ان $(Z,+,.)$، $(R,+,.)$، $(Q,+,.)$ حلقات ابدالية بمحايد.

٢- ان $(M_2(R),+,.)$ حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب المصفوفات حيث ان :

$$M_2(R) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; a,b,c,d \in R\right\}$$

ان صفر هذه الحلقة هو المصفوفة الصفرية $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ وعنصر الوحدة فيها هو المصفوفة الواحدية $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ لكنها ليست ابدالية، فعلى سبيل مثال

$$\forall \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(R)$$

فأن

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ولكن } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

٣- مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة $Z^+ = \{0,1,2,3,\dots\}$ مع عملية الثنائية (+)، (.) لاتشكل حلقة.

٤- الأعداد الصحيحة الزوجية $2Z = \{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}$ مع عملية الثانئية (+) و (.) لاتشكل حلقة

نظرية (١-١-٥): (خصائص الاساسية للحلقة)

ليكن $(R,+,.)$ حلقة، $a,b,c \in R$ فأن:

1) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

2) $-(-a) = a$

3) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

4) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

5) $a(b - c) = ab - ac$

6) $(a-b)c = ac - bc$

نتيجة (١-١-٦):

لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، اذا وجد في R عنصر وحدة، فأنه سيكون وحيدا. واذا وجد لعنصر ما من R معكوس، فانه يكون وحيدا ايضا.

تعريف (١-١-٧):

اذا كانت العنصر a في الحلقة R له معكوس بالنسبة لعملية الضرب فانه يسمى عنصر وحده (*unit element*) ويرمز لمجموعة عناصر الوحدة للحلقة R بالرمز G_R

مبرهنة(١-١-٨):

اذا كانت R حلقة ذات عنصر محايد فأن G_R زمرة بالنسبة لعملية الضرب.

مثال (١-١-٩):

ليكن $(Z_n,\oplus,.)$ حلقة ابدالية منتهية ذات عنصر محايد هو *1*، حيث ان

$$Z_5 = \{0,1,2,3,4\}$$

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

⊗	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Z_5 حلقة ابدالية منتهية ذت عنصر محايد

$$G_{Z_5} = \{1,2,3,4\}$$

٢.حلقة جزئية (*Subring*)

تعريف(١-٢-١):

لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، ولتكن S مجموعة جزئية غير خالية من R. اذا كانت S حلقة بالنسبة للعمليتين (+) و (.) على S، فاننا نقول ان $(S,+,.)$ **حلقة جزئية (*Subring*)** من الحلقة $(R,+,.)$، ونرمز لذلك ب $S \leq R$.

اذا كانت $S \leq R$ و $S \neq R$، فاننا نقول ان $(S,+,.)$ **حلقة جزئية فعلية (*Proper subring*)** من الحلقة $(R,+,.)$ ونرمز لذلك ب $S < R$.

أمثلة (١-٢-٢):

١- اذا كانت $R = (Z,+,.)$ وكانت $H_n = (nZ,+,.)$ فأن $H_n \leq R$ لكل عدد صحيح موجب n.

٢- اذا كانت $R = (Z,+,.)$ فان كل من $Q(\sqrt{p}), Z(\sqrt{p}), Z, Q, H_n$ حلقة جزئية من R حيث P عدد اولي.

٣- لكل حلقة جزئية R حلقتين جزئيتين على الاقل هي $R,\{0\}$ وتسميان الحلقتين الجزئيتين التافهتين.

نظرية(١-٢-٣):

اذا كان $S_1, S_2 \leq R$ فكذلك $S_1 \cap S_2 \leq R$

ملاحظات:

نفرض أن R حلقة فأن :

١- اذا كان $S_1, S_2 \leq R$ فليس من الضروري أن يكون $S_1 \cup S_2 \leq R$.

فمثلا $2Z, 3Z \leq Z$ بينما $2Z \cup 3Z \not\leq Z$

٢- اذا كانت $S \leq R$ فقد تكون R ذات عنصر محايد بينما R ليس بها عنصر محايد.

٣- اذا كانت $S \leq R$ فقد تكون S بها عنصر محايد بينما R ليس بها غنصر محايد.

فمثلا: اذا كانت

$$S_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b \in Z\right\}, S_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a \in Z\right\}$$

فان كل من S_1, S_2 حلقة ونلاحظ أن $S_2 \leq S_1$ ليس لها عنصر محايد بينما S_2 لها عنصر محايد هو $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

٤- اذا كان $S \leq R$ فقد يكون R لها عنصر محايد و S ايضا عنصر محايد ولكن العنصرين المحايدين مختلفين ومثال على ذلك الحلقة S_2 في (٣).

مبرهنة(١-٢-٤):

لتكن $(R,+,.)$ حلقة ما، واذا كانت $\varphi \neq S \subseteq R$، فأن الشرط اللازم والكافي لكي تكون $(S,+,.)$ حلقة جزئية من الحلقة $(R,+,.)$ هو ان يكون $x, y \in S, x - y \in S$ وذلك من اجل اي x,y من S.

٣.الحلقة التامة (الساحة التكاملية) (Integral domain)

تعريف (١-٣-١):

ليكن R حلقة، ان العنصر غير الصفري $a \in R$ هو قاسم صفري في R اذا يوجد عنصر غير صفري $b \in R$ حيث $ab = 0$ او $ba = 0$

أمثلة (١-٣-٢):

١- حلقة $\mathbb{Z}_6$ ، لا تحتوي على قواسم صفرية لان $2.3=0(mod6)$ و $3.4=0(mod6)$ حيث ان كل $2,3,4$ هي قواسم صفرية ومع ذلك 1 و 5 ليست قواسم صفرية.

٢- كل من $2,4,5,6,8$ قاسم الصفرفي Z_{10}.

٣- الحلقة Z_p حيث p عدد أولي لا تحتوي على قاسم الصفر.

٤- $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ قاسم الصفر في الحلقة $M_2(Z)$.

٥- كل من الحلقات $\mathbb{C}, R, Q, Z, Q(\sqrt{p})$ خالية من قواسم الصفر.

تعريف (١-٣-٣):

الحلقة الابدالية ذات العنصر محايد الخالية من قواسم الصفر تسمى **حلقة تامة(integral domains)**

امثلة (١-٣-٤):

١- ان حلقة الاعداد الصحيحة $(Z,+,.)$ هي حلقة تامة، لانها حلقة ابدالية بمحايد. واذا كان $x, y \in Z$ بحيث يكون $x.y=0$، فانه اما $x=0$ او $y=0$.

٢- لتكن حلقة $(\mathbb{Z}_p, +,.)$ حيث p عدد أولي، فان $(\mathbb{Z}_p, +,.)$ حلقة تامة لانها حلقة ابدالية واحدية، ولاتحتوي على قواسم الصفرية

٣- ان حلقة المصفوفات المربعة $(M_n(R),+,.)$ لا تشكل حلقة تامة لانها حلقة ليست ابدالية.

٤- حلقة جزئية من حلقة التامة ليست شرطا أن تكون تامة.

مبرهنة (١-٣-٥):

لتكن $(R,+,.)$ حلقة ابدالية بمحايد، عندئذ القضايا التالية متكافئة:

١- الحلقة $(R,+,.)$ تامة

٢- من اجل c, b, a من R حيث $a \neq 0$ ، فأن $a.b = a.c \Rightarrow b = c$

نتيجة (١-٣-٦):

لتكن $(R,+,.)$ حلقة واحدية، وليكن $u \in R$ عنصرا معكوسا (لها معكوس)، عندئذ u ليس من قواسم الصفر.

نظرية (١-٣-٧):

الحلقة R خالية من قواسم الصفر اذا وفقط اذا كان قانون الحدف من اليمين ومن اليسار متحقق.