جامعة تكريت
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات

محاضرة بعنوان
(المثاليات وانواعه)

اعداد الأستاذة:
م. ندى جاسم محمد

$Theideal$ المثالي

$Let(R,+,.)bearing\ and\ let\ \emptyset \neq I \subset R\ the\ (I,+,.)\ is\ called\ an\ ideal\ of$

$(R,+,.)iff$

شروط المثالي

1. $a - b \in I, \forall a, b \in I$
2. $r.a \in I, \forall a \in I, \forall r \in R$

ملاحظات: * كل مثالي هو حلقه جزئية و العكس ليس بلضرورة

:* اتحاد مثاليين ليس بالضرورة ان يكون مثالي

$Example$: (1)$Show\ that\ (z,+,.)is\ anideal\ of\ ring\ \ (Q,+,.)$

$$lat\ \ a = 1\ \ b = 2\ \ \ \forall\ \ a, b \in z\ \ \ 1 - 2 = -1 \in z$$

$let\ r \in Q\ \ R = {}^{1}/_{3}$

Lat a=1 b=2 $\forall a, b \in z$

1-2=-1$\in z$

Let a$\in z$ a=2

Let r $\in Q$ $r = {}^{1}/_{3}$ r.a ${}^{1}/_{3}$.2$\in z$

z is not idel of Q

Example:(2) Show that $(z, +, .)$ is anideal of ring$(z, +, .)$

Sol:

$2n, 2r, 2m$

$let\ a = 2n$

$b = 2m \quad \forall a, b\ z_e$

$a - b$

$2n - 3m = 2(n - m)$

$= 2r \in z_e$

$let\ a = 2n, \forall a \in z_e$

$let\ r \in z \rightarrow r = 3$

$r.a = 3(2n)$

$= 64$

$= 2(3n) \in z_e$

$z_e\ \ is\ ideal\ of\ \ z$

المثاليات $((ideals))$

1. $trivial$ تافة
2. $proper$ فعلي

المثاليات التافهة : الحلقه نفسها $(R,+,.)$
مجموعه الصفر $(\{0\},+,.)$

ملاحظة: الحلقة اذا احتوت على مثاليات تافهة فقط تكون الحلقة بهذه الحالة حلقة بسيطة

ملاحظة: في حلقة z_n إذا n عدد اولي فأن الحلقة تحتوي على مثاليات تافه فقط

$Example: find\ ideals\ of\ the\ ring\ (z_{12}, +_5, \cdot_5)$

$sol: z_e = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\overline{9},\overline{10},\overline{11}\}$

$I_1 = (\bar{1}) = (z_{12}, t_{12}, i_2)$

$I_2 = (\{0\}, +_{12}, i_2)$

$I_3 = (\{\bar{0},\bar{2},\bar{4},\bar{6},\bar{8},\overline{10}\}, +_{12}, i_2)$

$I_4 = (\{\bar{0},\bar{3},\bar{6},\bar{9}\}, +_{12}, i_2)$

$I_5 = (\{\bar{0},\bar{4},\bar{8}\}, +_{12}, i_2)$

$I_6 = (\{\bar{0},\bar{6}\}, +_{12}, i_2)$

$Example: find\ ideals\ of\ the\ ring\ (z_5, +_5, \cdot_5)$

$I_1 = (Z_5, +_5, \cdot_5)$

$I_2 = (\{0\}, +_5, \cdot_5)$

$Ideal\ generated\ by\ the\ set$

المثالي الذي يتولد بالمجموعة

يرمز بالرمز (S) او $< S >$ وهو ناتج تقاطع كل مثاليات الحلقة

$Example: In a ring\ (Z_{12}, +_{12}, i_2).\ let = \{\bar{0}, \bar{4}\}\ find\ < S >$

$Z_{12} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}\}$

$I_1 = (Z_{12}, +_{12}, \cdot_{12})\ I_2 = (\{0\}, +_{12}, \cdot_{12}\}$

$I_3 = (\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}), +_{12}, \cdot_{12})$

$I_4 = (\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}), +_{12}, \cdot_{12})$

$I_5 = (\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}, +_{12}, \cdot_{12})\ I_6 = (\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}, +_{12}, \cdot_{12})$

$< 6 >= I_1 \cap I_3 \cap I_5 = I_5$

المثالي الاساسي او الرئيسي $(frincipal\ Ideal)$

ويعرف كالتالي(a)المثالي الرئيسي : و هو المثالي الذي يتولد بعنصر منفرد

$$I = (a) = \{r.a : r \in R\}$$

$Example :$ $the\ frincipal\ ideals\ of\ the\ ring\ (Z_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$

$$I_1 = (\bar{1}) = (Z_{12}, +_{12}, \cdot_{12})$$

$$I_2 = (\bar{0}) = (\{0\}, +_{12}, \cdot_{12})$$

$$I_3 = (\bar{2}) = (\{0,2,4,6,8,10\}, +_{12}, \cdot_{12})$$

$$I_4 = (\bar{3}) = (\{0,3,6,9\}, +_{12}, \cdot_{12})$$

$$I_5 = (\bar{4}) = (\{0,4,8\}, +_{12})$$

$$I_6 = (\bar{6}) = (\{0,6\}, +_{12}, \cdot_{12})$$

ملاحظة :المثالي الاساسي الذي يتولد بالصفر هو حلقة الصفر $(\{0\}, +, .)$

$$(0) = \{r.0 : \forall\, r \in R\} = \{0\}$$

ملاحظة : المثالي الاساسي الذي يتولد بالواحد هو الحلقة نفسها

$$(1) = \{r : 1 : \forall\, r \in R\} = R$$

الحلقة المثالي الرئيسي Principal Ideal Ring

كل مثالي موجود بالحلقة هو مثالي رئيسي يعني متولد بعنصر واحد

$Example : the\ ring\ (Z, +\ ,.)\ primcipal\ ldeal\ Ring$

$(1) = Z$

$(2) = \{0, \mp 2, \mp 4, \mp 6, \dots\}$

$(3) = \{0, \mp 3, \mp 6, \mp 9, \dots\}$

.

.

.

ما لانهاية في المثالي الاساسية في حلقة $(Z, +, .)$

$Manimal\ ideals$ المثالي الاعظم او الاكبر

$Anonzeroideal(I,+,.)\ of\ ring\ (R,+,.) is\ cdled\ maximald\ if$

$(1) I \neq R$

$(2) I\ CRC \rightarrow M = R$

$Example: (Z_{12}, +_{12}, \cdot_{12})\ is\ aring$

$$I_1 = (\bar{2}) = \{0, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\} +_{12}, \cdot_{12}\ \}$$

$$I_2 = (\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}, Z_{12}, \cdot_{12}\ \}$$

$$I_3 = (\bar{4}) = \{0,4,8\}, +_{12}, \cdot_{12}\ \}$$

$$I_4 = (6) = \{0,6\}, +_{12}, \cdot_{12}\ \}$$

$$I_1(\bar{2}), I_2(\bar{3}) mauimal\ ideals$$

ملاحظة : المثاليات التي تتوفر في معاملات n الاولية في حلقة Z_n هي مثاليات عظي