جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة الرابعة – التحليل العقدي

الدوال القابلة للاشتقاق

الاستاذ نهاد شريف خلف

الايميل: nihad.shreef16@tu.edu.iq

(المحاضرة: التاسعة)

الدوال القابلة للإشتقاق Differentiable functions

تعريف. لتكن f دالة معتمدة معرفة على كل نقاط الجوار للنقطة z_0، فإن مشتقة الدالة f عند z_0 تكتب بالشكل $f'(z_0)$ وتعرف بالمعادلة

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad (2)$$

بشرط أن الغاية موجودة.

ونقول الدالة f قابلة للإشتقاق عند النقطة z_0 إذا تحقق الشرط أعلاه فإذا وضعنا $\Delta z = z - z_0$ في المعادلة (2) فإن $f'(z_0)$ يمكن إعادة صياغتها بالصورة

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

الأن لتكن $w = f(z)$, $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ فإن الرمز $\frac{dw}{dz}$ للمشتقة يكون معرفاً كالآتي

$$f'(z_0) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

مثال: لتكن $f(z) = z^4$ إستخدم التعريف لإيجاد $f'(z)$.

الحل.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z^4 - {z_0}^4}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z + z_0)(z^2 + {z_0}^2)}{z - z_0}$$

$$= 4{z_0}^3$$

وبشكل عام فإن الصيغة النهائية المشتقة بعد إسقاط z_0 تكون $f'(z) = 4z^3$ ومن الجدير بالذكر هنا أن خواص مشتقات الدوال العقدية هي نفسها خواص مشتقات الدوال الحقيقية بالإضافة عند حساب الغاية فيجب أن ننتبه للقيم العقدية Δz حيث الغاية لهذه القيمة لاتعتمد على مسار $\Delta z \to 0$ فإذا وجدنا مسارين مختلفين لهذه الغاية فإن الدالة العقدية تكون غير قابلة للإشتقاق وتوضيح ذلك في المثال الأتي:

مثال: إذا كانت الدالة $f(z) = \bar{z}$ ، اثبت أنها غير قابلة للإشتقاق .

الحل.

ندرس الغاية لمسارين مختلفين للنقطة ، فإذا كان الإقتراب الأول للنقطة z_0 على طول الخط الموازي للمحور الحقيقي فإن $z = x + iy_0$ ، وعليه يكون

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{(x - iy_0) - (x_0 - iy_0)}{(x - x_0) + i(y_0 - y_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

أما إذا كان الإقتراب للنقطة z_0 على طول الخط الموازي للمحور التخيلي y فإن $z = x_0 + iy$ وعليه يكون

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x+iy_0) \to (x_0+iy_0)} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0)\to(x_0+iy_0)} \frac{(x_0 - iy) - (x_0 - iy_0)}{(x_0 - x_0) + i(y - y_0)}$$

$$= \lim_{(x+iy_0)\to(x_0+iy_0)} \frac{-i(y - y_0)}{i(y - y_0)} = -1$$

ومن أعلاه نجد أن $f(z) = \bar{z}$ غير قابلة للإشتقاق لإختلاف قيمة الغاية.

مثال: لتكن الدالة العقدية المعرفة بدلالة القيم الحقيقية كالآتي $f(z) = |z|^2$ إثبت أن المشتقة موجودة فقط عند الصفر وليس في أي مكان آخر.

الحل.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} \qquad (3)$$

$$= \bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

وكما في المثال أعلاه وبنفس الإتجاهات إلى النقطة ، يكون لدينا $\overline{\Delta z} = \Delta z$, $\overline{\Delta z} = -\Delta z$ على الترتيب

وعليه عندما يكون $\Delta z = (\Delta x, 0)$ فإن

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \bar{z} + \Delta z + z$$

وعندما $\Delta z = (0, \Delta y)$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \bar{z} - \Delta z - z$$

وهنا إذا كانت الغاية موجودة ووحيدة عندما $\Delta z \to 0$ فإن

$$\bar{z} + z = \bar{z} - z$$

وعليه فإن $\frac{dw}{dz}$ غير موجودة عند $z \neq 0$ ولإثبات أن $\frac{dw}{dz}$ موجودة فإنه من العبارة (3) $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{\Delta z}$

وعندما $z = 0$ ونستنتج أن $\frac{dw}{dz}$ موجودة.

بينما هذه الدالة مستمرة عند كل نقاط المستوي لذلك الإستمرارية للدالة عند نقطة لا تؤدي إلى قابلية الإشتقاق للدالة بينما إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند نقطة فإنها مستمرة عند تلك النقطة ولبرهنة ذلك نفرض أن $f(z)$ قابلة للإشتقاق عند z_0 الدالة ونكتب هذا رياضياً كالآتي:

$$\lim_{z\to z_0}\left(f(z) - f(z_0)\right) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z\to z_0}(z - z_0)$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

ومن هذا نجد أن $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

وهذا تعريف مكافئ للإستمرارية للدالة f عند نقطة z_0.

خواص الدوال القابلة للإشتقاق

نظرية . لتكن كل من g, f دوال قابلة للإشتقاق عند النقطة z ، فإن

1. $(cf(z))' = cf'(z)$
2. $(f \mp g)'(z) = f'(z) \mp g'(z)$
3. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} \quad , \quad g(z) \neq 0$
5. $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$
6. إذا كانت $f(z) = c$ فإن $f'(z) = 0$
7. إذا كانت $f(z) = z^n$ فإن $f'(z) = nz^{n-1}$

معادلتي كوشي – ريمان Cauchy-Riemann's Equations

في هذا البند نحصل على زوج من المعادلات ذات المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال الحقيقية v, u للدالة العقدية القابلة للإشتقاق عند z_0 والتي تكون بالشكل الآتي:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

وهذا الزوج من المعادلات أكتشف سابقاً من قبل العالم الرياضي الفرنسي A.L. Cauchy والعالم الألماني G.F. Riemann.

ونبدأ بوضع $z_0 = x_0 + iy_0 \ , \ \Delta z = \Delta x + i \Delta y \ , \ \Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$

$$= [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]$$

لنفرض أن المشتقة $f'(z_0)$ تعطى بالصورة الآتية:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \qquad (4)$$

موجودة ، لذلك يكون لدينا

$$f'(z_0) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(Re\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) + i\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(Im\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)$$

ومن خلال ما ورد أعلاه فإن $(\Delta x,\Delta y)$ تذهب إلى $(0,0)$ بأي طريقة نختاره وبصورة خاصة إذا كان الأقتراب إلى $(0,0)$ أفقياً خلال النقطة $(\Delta x,0)$ فإن $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ تصبح

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0+\Delta x,y_0)}{\Delta x} + i\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

لذلك

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(Re\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\Delta x} = u_x(x_0,y_0)$$

ويكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(Im\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x_0+\Delta x,y_0)-v(x_0,y_0)}{\Delta x} = v_x(x_0,y_0)$$

حيث أن v_x, u_x هي المشتقات الجزئية الأولية بالنسبة للمتغير x عند النقطة (x_0,y_0) وبالتعويض في (4) نستنتج أن

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)$$

والآن وبنفس الطريقة بإمكاننا أن ندع $0 \longrightarrow \Delta z$ عمودياً خلال النقطة $(0,\Delta y)$ فإن $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ تصبح

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y} + i\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}$$

$$= v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0) - i\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

لذلك يكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(Re\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{\Delta y} = v_y(x_0,y_0)$$

وأيضاً يكون

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(Im\frac{\Delta w}{\Delta z}\right) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{\Delta y} = -u_y(x_0,y_0)$$

حيث أن v_y, u_y هي المشتقات الجزئية الأولية بالنسبة للمتغير y عند النقطة (x_0,y_0) وبالتعويض في (4) نستنتج أن

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= v_y(x_0,y_0) + iu_y(x_0,y_0) \\ &= -i\left[u_y(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0)\right] \end{aligned}$$

ومن قيم المشتقة $f'(z_0)$ في كلتا الحالتين نستنتج أن

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \;, \qquad u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

وهما معادلتي كوشي وريمان (Cauchy-Riemann Equations)

ومن الممكن تلخيص النتائج التي حصلنا عليها أعلاه كالآتي من خلال إعطاء الشرط الضروري لتحقيق معادلتي كوشي ريمان .