جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة : الثالثة

المادة : تحليل رياضي

عنوان المحاضرة : **متتابعات في الفضاء المتري**

مدرس المادة : ا.د. رنا بهجت ياسين

الايميل الجامعي : Zain2016@ tu.edu.iq

المتتابعات في الفضاء المتري :

تعريف: المتتابعات المتقاربة في الفضاء المتري

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $< x_n >$ متتابعه في X يقال أن هذه المتتابعه

$< x_n >$متقاربه $x_0 \in X$

أي $< x_n > \longrightarrow x_0$ إذا حققت الشرط التالي :

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, k = k(\epsilon)\quad , d(x_{\,n}, x_{\,0}) < \epsilon\ , \forall\, n > k$$

تعريف : المتتابعات المقيدة في الفضاء المتري

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $< x_n >$ متتابعه في X يقال أن هذه المتتابعه $< x_n >$ مقيده بعدد حقيقي موجب مثل m إذا حققت الشرط التالي :

$$d\,(x_n\,, 0) < m\,, n \in N\,, m \in R$$

تعريف (١-٨) : المتتابعات الأساسية الكوشيه في الفضاء المتري

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $< x_n >$متتابعه في X يقال أن هذه المتتابعه

$< x_n >$ كوشيه أساسيه إذا حققت الشرط التالي:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\, k = k(\epsilon), \qquad d(x_n, x_m) < \epsilon\ , \forall\, n, m > k$$

قضيه (١-٩) : [3]

إذا كان (X,d) فضاءاً مترياً فكل متتابعة متقاربة $< x_n >$ في X تكون متتابعه أساسيه

البرهان :

نفرض ان $< x_n > \longrightarrow x_0$ وليكن $\epsilon > 0$ يوجد $k \in N$ بحيث أن $d(x_n, x_m) <$ $\frac{\epsilon}{2}\ , \forall\, n, m > k$

$$d(x_n, x_m) \leq\ d(x_n, x_0) +\ d(x_m, x_0)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

والان نستعرض خواص المجموعات في الفضاءات التبولوجية :

تعريف :

ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا Aو مجموعة جزئية من X. نفرض ان x نقطة ما تنتمي الى X. تسمى النقطة x بنقطة تراكم (Accumulation point) للمجموعةA او نقطة غاية .

اذا وفقط اذا لكل مجموعة مفتوحة B تحتوي على النقطة X فان تقاطع A مع B يحوي على الاقل نقطة أخرى تختلف عن X وتسمى مجموعة هذه النقاط بالمجموعة المشتقة للمجموعةA

ويرمز لها بالرمز A'، بعبارة اخرى $(B - \{X\}) \cap A \neq \phi$.

مبرهنة :

ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا وA مجموعة جزئية من X فان اتحاد نقاط التراكم **(المجموعة المشتقة)** للمجموعة A مع المجموعة A تنتج مجموعة الانغلاق الى A أي ان

$\bar{A} = A \cup A'$.

تعريف :

ليكن (X, T) فضاءا تبولوجيا و A مجموعة جزئية من X. ولتكن Xنقطة ما تنتمي الى X. تسمى النقطة xبنقطة داخلية للمجموعة A اذا وفقط اذا توجد مجموعة مفتوحة مثل B تحتوي على x و B جزئية من A.

واضح ان النقطة x تنتمي الى A تسمى مجموعة هذه النقاط بالمجموعة الداخلية الى A ويرمز لها بالرمز $int\ (A)$.

تعريف :

ليكن (X,T) فضاءا تبولوجيا وان Y مجموعة جزئية غير خالية من X فان عائلة المجموعات الجزئية من Y التي تنتج من تقاطع المجموعات المفتوحة من X مع المجموعة Y والتي نرمز لها بالرمز T_y أي

$$\boldsymbol{T_y} = [\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{A} \text{ مجموعة مفتوحة في } \boldsymbol{X}]$$

سنعطي تسمية عائلة هذه المجموعات بعد المبرهنة التالية

مبرهنة :

لتكن Y مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء التبولوجي(X,T) فان عائلة T_y المعرفة اعلاه تشكل تبولوجي على Y .

مبرهنة :

ليكن (X,T_y) فضاءا تبولوجيا جزئيا من الفضاء التبولوجي (X,T) و $[A_i]_{i=I}$ قاعدة للفضاء التبولوجي (X,T) فأن $[A_i \cap Y]_{i=I}$ قاعدة للفضاء التبولوجي الجزئي.