جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة : الثالثة

المادة : تحليل رياضي

عنوان المحاضرة :مفاهيم أساسيه في الفضاء المتري

مدرس المادة : ا.د. رنا بهجت ياسين

الايميل الجامعي : Zain2016@ tu.edu.iq

كما يوفر الفضاء المتري إطارًا أساسيًا لفهم الفضاءات الطوبولوجية، إذ إن العديد من المفاهيم الطوبولوجية، مثل التقارب والاستمرارية والمجموعات المغلقة والمفتوحة، يمكن فهمها باستخدام الفضاءات المترية. يرتبط الفضاء المتري بمفهوم دالة مسافة، وهو زوج مرتب (X, d) ، يتكون من مجموعة غير خالية X (يمكن أن تكون عناصرها نقاطًا، أو منحنيات، أو دوال، أو مصفوفات، أو متتابعات أو غيرها).

تعريف :

ليكن$X = (X, d)$ فضاءاً مترياً ولتكن $x_0 \in X$ إذا كانت r عدداً حقيقياً موجباً فأن :

$$B_{\,r}(x_0) = \{x \ \in X :\ d(x, x0) < r\}$$

$$D_{\,r}(\ x_0\ ) = \{x \in X :\ d(x, y) \leq r\}$$

حيث نَصِف المجموعة $Br\ (x_0)$ بأنها الكره التي مركزها x_0 ونصف قطرها r كما نَصِف المجموعة $Dr(x_0)$ بانها القرص الذي مركزه x_0 ونصف قطره r .

نلاحظ ان كلاً من الكره والقرص يحتوي على x_0 إذا كانت $X = \mathbb{R}$ ،

وكانت $x_0 \ \in R$ فأن

$$Br(x_0)\ = \{\ x \in \mathbb{R}\colon |x - x_0| < r\ \} = \ (\ x_0\ - r\ , x_0 + r)$$

وهذه فتره مفتوحه في $\mathbb{R}$.

أي ان كل كره في $\mathbb{R}$ هي عباره عن فتره مفتوحه وبالمثل كل قرص في $\mathbb{R}$ هو عباره عن فتره مغلقه والعكس صحيح .

تعريف :

ليكن X فضاءاً مترياً و S مجموعه جزئيه من X يقال أن المجموعة S هي مجموعة مفتوحه إذا كان لكل

$x_0 \in X$ يوجد $0 < r$ بحيث أن $Br\ (x_0) < S$

أي أن المجموعة S لا تحتوي علىx_0 فقط بل تحتوي على كره مركزها x_0.

المبرهنة :

لتكن (X,d) فضاء متريًا عندها كل كرة مفتوحة في X هي مجموعة مفتوحة بالنسبة الى تبولوجي المتري المولدة ب d .

البرهان : لتكن $B_r(a) = \{x \in X : d(a,x) < r\}$ كرة مفتوحة مركزها a ونصف قطره ناخذ $r > 0$ نأخذ اي نقطة $b \in B(a,r)$ عندها $d(a,b) = \varepsilon < r$ فلتكن $\delta = r - \varepsilon > 0$

اذا $x \in B(b,\delta)$ فمن شرط الرابع نحصل على $d(a,x) < r$

لذلك $x \in B(a,r)$ اي ان $B(b,\delta) \subseteq B(a,r)$.

بما ان لكل $b \in B(a,r)$ توجد كرة حولها محتواه في $B(a,r)$ ، فان تمثل $B(a,r)$ مجموعة مفتوحة .

ملاحظة :

المبرهنة اعلاه هي التي تربط بين الفضاء المتري والفضاء التبولوجي.

اذن كل فضاء متري يولد فضاء تبولوجي طبيعي اساسه الكرات المفتوحة .

خواص الاساسية للكرات المفتوحة :

لتكن (X,d) فضاء متري ، فعندها :

١- $B(a,r)$ كرة مفتوحة لكل a , b

٢- $a \in B(a,r)$ ، $\forall r > 0$

٣- اذا كانت $b \in B(a,r)$ و يوجد $\delta > 0$ بحيث $B(b,\delta) \subseteq B(a,r)$

٤- $D(a,r)$ قرص فان $\mathrm{cl}(B(a,r)) = D(a,r)$.

مبرهنة :

الكرات المفتوحة تشكل قاعدة عائلة $B = \{B_d(a,r) : a \in X, r > 0$ تشكل قاعدة للتبولوجي المتري المولدة بالدالة d.

نتيجة :

كل مجموعة مفتوحة في (X,τ_d) يمكن كتابتها كاتحاد كرات مفتوحة .

لذا سنعرف التبولوجيا المترية :

تعريف :

لتكن (X,d) فضاء متريًا ، عائلة τ_d من جزئيات X تسمى تبولوجيا مترية اذا كانت المجموعات المفتوحة هي اتحاد الكرات المفتوحة .

ولكون علم التبولوجيا تمتد جذوره الى عصوره الحضارية الاغريقية ، حيث قام الاغريق بدراسة مفهوم الاستمرارية (continuous) ، لكن علم التبولوجي لم يظهر بوضعه الحالي الا في بداية مطلع هذا القرن حين نشر فرشيه (freshet) عام ١٩٠٦ اطروحته التي تناولت اقتران (function) المسافة والعلاقة بينه وبين مفهوم الاستمرارية لكن الباحثين ريز (Riesz) و هاوسدورف (Hausdorff) بينا فيما بعد ان لا ضرورة لهذا الدوال ويمكن دراسة الاستمرارية دون الرجوع الى اقتران المسافة وبهذا ظهر ما يسمى بعلم التبولوجيا العامة.

تعريف : الفضاء التبولوجي

لتكن X مجموعة فير خالية و T اسرة مجموعات جزئية من X بحيث ان T تحقق الشروط الأتية :

١-المجموعتان $\emptyset$ ، X تنتميان الى T .

٢- لكل A_1،A_2 ينتميان الى T فان تقاطع A_1 مع A_2 ينتمي الى T (أي ان تقاطع عدد منته من عناصر T يكون عنصراً في T ايضاً).

٣- لتكن $A_1, \dots\dots A_2, \dots\dots\dots A_n$ عدد غير منته من عناصر T فان اتحاد هذه المجموعات هي مجموعه تنتمي الى T (أي ان اتحاد عدد غير منته من عناصر T هو عنصراً في T). هي مجموعه تنتمي الى T (أي ان اتحاد عدد غير منته من عناصر T هو عنصراً في T).

نسمي T بالتبولوجيا على X وليكن (X,T) بالفضاء التبولوجي وعناصر T تسمى بالمجموعات المفتوحة وعناصر X بالنقاط.

مثل :لتكن $X = R$ حيث R مجموعة الاعداد الحقيقيه وان T عائلة جميع المجموعات الجزئية من X المساوية الاتحاد فترات مفتوحة . فأن T تبولوجي على R.