جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة : الثالثة

المادة : تحليل رياضي

عنوان المحاضرة : انغلاق ومحدودية المجموعة

في الفضاء المتري

مدرس المادة : ا.د. رنا بهجت ياسين

الايميل الجامعي : Zain2016@ tu.edu.iq

تعريف :انغلاق المجموعة

ليكن (X,τ) فضاء متري ولتكن $A \subseteq X$ يقال عن النقطة $x \in X$ بأنها نقطة ملاصقة (Adherent point) أو نقطة انغلاق أو (closure point) أو نقطة اتصال (contact point) ألى المجموعة A إذا كان لكل $r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $d(x,y) < r$ المجموعة التي عناصرها جميع نقاط الإنغلاق للمجموعة A تسمى إنغلاق (Closure) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\bar{A}$

$$\bar{A} = \{x \in X : \forall r > 0, \exists y \in A \ni \ d(x,y) < r\}$$

وعليه$\bar{A} \subset A$ ومن التعريف مباشره نستنتج أن

١) $\bar{A}$ مجموعه مغلقه في X
٢) A مجموعه مغلقه إذا وفقط إذا كان $\bar{A} = A$
٣) $A^{=} = \bar{A}$
٤) تساويA تقاطع جميع المجموعات المغلقه في X والتي تحتوي على A ، أي أن

$$\bar{A} = \cap \{F \subseteq X : A \subset F\ X \text{مجموعه مغلقه في} F\}$$

وعليه $\bar{A}$ تكون أصغر مجموعه مغلقه في X وتحتوي على A

مثال:

ليكن (X,d)فضاء متري مبعثر ولتكن $A \subseteq X$ جد $\bar{A}$ ، بما أن(X,d) فضاء متري مبعثر $\Leftarrow$ A مغلقه $\Leftarrow$ $\bar{A} = A$

أمثلة :

ليكن(R, d_u) فضاءاً مترياً إعتيادياً ولتكن $A \subseteq R$

١) إذا كانت $A = (a,b)$ فان$\bar{A} = [a,b]$
٢) إذا كانت $A = [a,b)$ فان$\bar{A} = [a,b]$
٣) إذا كانت $A = (a,b]$ فان$\bar{A} = [a,b]$
٤) إذا كانت $A = [a,b]$ فان$\bar{A} = [a,b]$

٥) إذا كانت $A = \mathbb{N}$ فأن $\bar{A} = \Phi$ حيث $\mathbb{N}$ تمثل مجموعه الاعداد الطبيعيه

٦) إذا كانت $A = \mathbb{Z}$ فأن $\bar{A} = \Phi$ حيث $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعه الاعداد الصحيحه

٧) إذا كانت $A = \mathbb{Q}$ فأن $\bar{A} = \Phi$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعه الاعداد النسبيه

٨) إذا كانت $A = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$ فأن $\bar{A} = A \cup \{0\}$

٩) $A = \{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots\}$ فأن $\bar{A} = A \cup \{1\}$

مبرهنه :

ليكن (X, d) فضاءاً مترياً ولتكن $A \subseteq X$

١) $A' \subset \bar{A}$

٢) $\bar{A} = A \cup A'$

٣) إذا كانت $A' = \Phi$ فأن المجموعة A تكون مغلقه في X

٤) المجموعة A تكون مغلقه في X إذا وفقط إذا كانت $A' \subset A$

٥) $\bar{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$

تعريف: النقاط الحدودية

ليكن (X, d) فضاءاً مترياً ولتكن $A \subseteq X$. يقال عن النقطة $x \in X$ بأنها نقطه حدوديه (Boundary point) أو (Frontier point) إلى المجموعة A إذا كان لكل $r > 0$ يوجد $y \in A,\ z \in A^c$ بحيث أن $d(x, y) < r, d(x, z) < r$

مجموعه كل النقاط الحدودية إلى المجموعة A تسمى جبهه (Frontier) المجموعة A ويرمز لها بالرمز $\partial(A)$ ، أي أن

$$\partial(A) = \{x \in X : \forall\, r > 0, y \in A^c, z \in A\ S.T.\, d(x, y) < r, d(x, z) < r$$

مبرهنه:

ليكن (X, d) فضاءاً مترياً ولتكن $A \subseteq X$

١) $\partial(A) = \bar{A} \cap \bar{A^c}$ وعليه $\partial(A) \subset \bar{A}$

٢) $\partial(A) = \partial(A^c)$

٣) $\partial(A)$ مجموعه مغلقه في X

٤) $A^0 = A|\partial(A)$

٥) $\bar{A} = A \cup \partial(A)$

مثال :

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن X $A \subseteq X$ جد $\partial(A)$

بما أن A مجموعه مغلقه $A = \bar{A}$ ⟸ وكذلك A_c مغلقه ⟸ $A_c = (\bar{A}_c)$ ⟸

$(A)=\bar{A}\cap\partial\ A^{c=\Phi}\cap(\bar{A}^c)= A$

مبرهنة

ليكن (X,d) فضاءاً مترياً ولتكن $A,B \subseteq X$

١) $\partial(A \cup B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$

٢) $\partial(A \cap B) \subseteq \partial(A) \cup \partial(B)$

وتُعد هذه المفاهيم أساسًا نظريًا مهمًا لفهم موضوع التقارب في الفضاءات المترية، والذي سيتم التطرق إليه في الفصول اللاحقة وربطه ببعض التطبيقات في التحليل العددي.فترات مفتوحة . فأن T تبولوجي على R.