جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة : الثالثة

المادة : تحليل رياضي

عنوان المحاضرة : دواخل وخوارج ومشتقات المجموعة

في الفضاء المتري

مدرس المادة : ا.د. رنا بهجت ياسين

الايميل الجامعي : Zain2016@ tu.edu.iq

تعريف : النقاط الداخلية لمجموعة

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $A \subseteq X$ يقال عن النقطه $x \in A$ بأنها نقطه داخليه في A إذا وجدت مجموعه مفتوحه G في X بحيث أن $x \in G \subset A$.

بعباره اخرى إذا وجد $r > 0$ بحيث أن $B_r(x) \subseteq A$ مجموعه كل النقاط الداخليه في A تسمى داخل المجموعة A ، يرمز له بالرمز A^0 أو $int(A)$.

أي ان

$$B_r(x) \subseteq A \; A^0 = \{x \in A : \exists\, r > 0,$$

وعليه $A^0 \subset A$ ومن التعريف مباشرة نستنتج

i. A^0مجموعه مفتوحه في X
ii. A مجموعه مفتوحه في إذا وفقط إذا كان $A^0 = A$
iii. $(A^0)^0 = A$
iv. A^0تساوي اتحاد جميع المجموعات المفتوحه في X والمحتواة في A ، وعليه A^0تكون اكبر مجموعه مفتوحه في X محتواة في A

مثال :

ليكن (X,d) فضاء متري مبعثر ولتكن $A \subseteq X$ فان النقاط الداخلية A^0

للفضاء (X,d)فضاء متري مبعثر

فان A مجموعه مفتوحه في X وعليه $A^0 = A$

مثال :

لتكن $(\mathbb{R},d)$ فضاءًا متري اعتيادي ولتكن $A \subseteq \mathbb{R}$

١) إذا كانت $A = (a,b)$فأن $A^0 = (a,b)$
٢) $A = [a,b)$فأن $A^0 = (a,b)$

٣) $A = [a,b]$ فأن $A^0 = (a,b)$

٤) إذا كانت $A = [a,b] \cup \{c,d\}$ فأن $A^0 = (a,b)$

٥) إذا كانت A منتهيه فأن $A^0 = \Phi$

٦) إذا $A = \mathbb{N}$ كانتفأن $A^0 = \Phi$ حيث $\mathbb{N}$ تمثل مجموعه الاعداد الطبيعيه

٧) إذا كانت $A = \mathbb{Z}$ فأن $A^0 = \Phi$ حيث $\mathbb{Z}$ تمثل مجموعه الاعداد الصحيحه

٨) إذا كانت $A = \mathbb{Q}$ فأن $A^0 = \Phi$ حيث $\mathbb{Q}$ تمثل مجموعه الاعداد النسبيه

٩) إذا كانت $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ فأن $A^0 = \Phi$.

تعريف : النقطة الخارجية للمجموعة :

إن النقطة $x \in X$ نقطه خارجيه للمجموعه A إذا وجدت مجموعه مفتوحه U في X بحيث أن

$$x \in U \subset X \backslash A$$

فان مجموعه النقاط الخارجية للمجموعة A نرمز لها بالرمز $Ext(A)$.

تعريف : المجموعة المشتقة

ليكن (X,d) فضاء متري ولتكن $A \subseteq X$ يقال عن النقطة $x \in X$ بأنها نقطه غايه (Limit point) أو (نقطه تراكم Accumulation) أو(نقطه متلاصقة Cluster point)إلى المجموعة A إذا كان لكل

$r > 0$ يوجد $y \in A$ بحيث أن $y \neq x$ و $d(x,y) < r$ مجموعه كل نقاط الغايه إلى المجموعه A تسمى بمشتقة $(derived)$ المجموعة A ويرمز لها بالرمز A'

$$A' = \{x \in X : \forall r > 0 , \exists y \in A \ \ s.t. y \neq x, d(x,y) < r\}$$

أو

إذا كان لكل كرة مفتوحة مركزها النقطة x ونصف قطرها r تحقق التالي :

$$B(x,r)/\{x\} \cap A \neq \Phi$$

مبرهنة :

ليكن (X,d) فضاءاً مترياً $x_0 \in X$ ولتكن $A \subseteq X$

١) إذا كانت $A = \Phi$ فأن $A' = \Phi$

٢) إذا كانت A' $x \in$ فأن $x \in (A|\{X\})$

٣) $x_0 \in A'$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي :

كل كرة مفتوحة مركزها x_0تحتوي على عدد غير منته من نقاط A

٤) $d(x_0,A) = 0$ إذا وفقط إذا كانت $x_0 \in A$ أو$x_0 \in A'$

مبرهنه :

ليكن (X,d) فضاءاً مترياً ولتكن $A,B \subseteq X$

١) إذا كانت $A \subseteq B$ فأن $A' \subseteq B'$

٢) $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$

٣) $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$

ملاحظة :

ليس من الضروري أن يكون $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$ والمثال التالي يوضح ذلك

مثال :

ليكن $(\mathbb{R},d)$ فضاءاً مترياً إعتيادياً ولتكن $B = \left\{-\frac{1}{n} : n \in N\right\}$ ، $A = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$

فأن

$A \cap B = \Phi \quad \leftarrow (A \cap B)' = \Phi$ ولكن $B' = \{0\}$ $A' = \{0\}$, $\leftarrow A' \cap B' = 0$