جامعة تكريت – كلية التربية للبنات – قسم الرياضيات

المرحلة : الثالثة

المادة : تحليل رياضي

عنوان المحاضرة : الفضاءات المترية (Metric spaces)

مدرس المادة : ا.د. رنا بهجت ياسين

الايميل الجامعي : Zain2016@ tu.edu.iq

يُعد مفهوم الفضاءات المترية من المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي والتبولوجي، حيث يوفر إطارًا عامًا لدراسة مفهوم المسافة بين العناصر في مجموعة ما.

وقد ساهم هذا المفهوم في توسيع دراسة التقارب والاستمرارية والحدود، وهو الأساس الذي بُنيت عليه العديد من الفروع الرياضية مثل التحليل الدالي وطرق التحليل العددي .

<u>تعريف (١-١)</u> : الفضاءات المترية

يُقال ان الزوج المرتب (X, d) فضاءاً مترياُ اذا كانت X مجموعة غير خاليه و d تطبيق من $X \times X \to \quad \mathbb{R}$ يستوفي الشروط التأليه :

١. $d(x, y) \;\geq 0 \;\; \forall\, x, y \;\in X$(سالب غير التطبيق)
٢. $d(x, y) = 0 \;\leftrightarrow\; x = y$
٣. $d(x, y) = d(y, x), \;\; \forall\, x, y \in X$ (متناظر التطبيق)
٤. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \quad \forall\, x, y, z \;\in X$ (المثلث متراجحة)

تسمى عناصر المجموعة X نقاط الفضاء او(النقاط) ويسمى العدد $d(x, y)$ البعد بين النقطتين x, y ، كما يسمى التطبيق d بُعد أو مسافة.

<u>والان ، سنتناول بعض الامثلة على الفضاءات المتريه :</u>

<u>مثال (١):</u>

١- ليكن الزوج المرتب $(\mathbb{R}, d)$ حيث $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية و d المعرفة :

$$\forall\, x,y \in R \ni \qquad d(x,y) = |x-y|$$

فان

(١ $d(x,y) \geq 0 \rightarrow d(x,y) = |x-y| \geq 0$

Either $\quad x-y \geq 0$ or $\quad x-y < 0$

(٢ $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$

$$d(x,y) = |x-y| = 0 \rightarrow x-y = 0 \leftrightarrow x = y$$

(٣ $d(x,y) = d(y,x)$

$$d(x,y) = |x-y| = |\,(-1)y - x| = |y-x| = d(y,x)$$

(٤ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y|$$

$$\leq |x-z| + |z-y|$$

$$\leq d(x,z) + d(z,y)$$

لذا فان$(\mathbb{R},d)$ يمثل فضاءً مترياً اعتيادياً

مثال (٢)

لتكن X مجموعة غير خالية المعرفة على الفضاء المتري على النحو التالي

$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \; x = y \\ 1 & , \; x \neq y \end{cases}$ حيث ان دالة المسافة تحقق شروط السابقة

١. $d(x,y) \geq 0$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x = y \\ 1 & , \quad x \neq y \end{cases}$$

٢. $x = y \leftrightarrow d(x,y) = 0$ (حسب الدالة المسافة المعرفة الشرط متحقق)

٣. $d(x,y) = d(y,x)$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ x = y \\ 1 & , \ x \neq y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 & , \ y = x \\ 1 & , \ y \neq x \end{cases} = d(y,x)$$

٤. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ لكل $x,y,z \in R$

$x = y = z \quad \rightarrow 0 \leq 0 + 0$

$x \neq y \neq z \quad \rightarrow 1 \leq 1 + 1$

$x = y \neq z \quad \rightarrow 0 \leq 1 + 1$

$x \neq y = z \quad \rightarrow 1 \leq 1 = 0$

فنحصل على ان $(\mathbb{R}, d)$ هو فضاء متري

مثال (٤) :

ليكن (X,d) فضاءاً مترياً و S مجموعه غير خاليه وجزئيه من X وإذا عرفنا البعد d_S بين أي نقطتين في S بأنه البعد بينهما كنقاط في X نحصل على فضاء متري (S, d_S).

ملاحظة :

لابد من التأكيد ان الفضاء المتري ليس مجموعه X لوحدها بل المجموعة X مع البعد d حيث نجعل من X فضاءاً مترياً بأكثر من طريقه واحده وذلك بإعطاء صيغ مختلفة إلى d .