



جامعة تكريت
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات
التفاضل والتكامل
الدوال المثلثية
ام.د. هبة هاني عبدالله

hiba.h.a.83@tu.edu.iq

الفصل الخامس

الدوال المثلثية: Trigonometric Function

سوف نعرف ست دوال مثلثية بدلالة الزاوية المركزية θ المرسومة في دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها r .

فاذا كانت θ الزاوية المركزية التي احد ضلعيها منطبق على محور X والاضلع الاخر مرسوم من نقطة الأصل ويقطع محيط الدائرة في النقطة $P(x, y)$ فان:

$$\text{sine: } \sin\theta = \frac{y}{r}$$

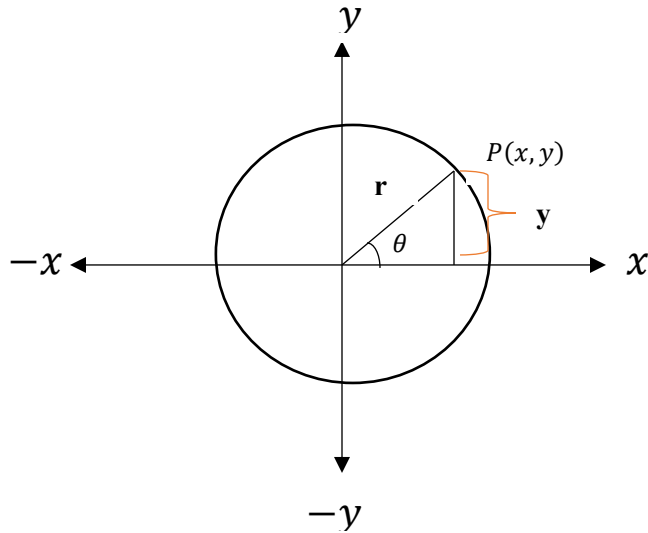
$$\text{cosine: } \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\text{tangent: } \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\text{cosecant: } \csc\theta = \frac{r}{y}$$

$$\text{secant: } \sec\theta = \frac{r}{x}$$

$$\text{cotangent: } \cot\theta = \frac{x}{y}$$



من التعاريف السابقة يمكن وإيجاد علاقه بين بعض الدوال المثلثية مع البعض الاخر كما يلي:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\csc\theta}{\sec\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

ولما كانت معادلة الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها r هي:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta \\ y &= r \sin\theta \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{من تعرف الدالتين} \\ \sin, \cos \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow r^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta = r^2$$

$$\Rightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \quad \div r$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

وهذا احد اهم قوانين الدوال المثلثية والذي يمكن من خلاله اشتقاق قوانين أخرى منها:

$$\triangleright \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\triangleright \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$\triangleright \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \quad \text{or} \quad \sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$

$$\triangleright \cot^2\theta = \csc^2\theta - 1 \quad \text{or} \quad \csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$$

إذا كانت كل من A و B زاويتين فيمكن ان نجد الدوال المثلثية كحاصل جمعها او طرحها كما يلي:

$$\triangleright \cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\triangleright \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\triangleright \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$$

$$\triangleright \sin(A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$$

Prove that: $\tan(A \mp B) = \frac{\tan A \mp \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$?

Proof

$$\tan(A + B) = \frac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} \quad (\text{By def. of tan})$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} \quad \left(\begin{array}{l} \text{حسب قانون جمع أو طرح زاويتين لدالتي} \\ \sin, \cos \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B} \\ = & \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\sin B \cos A}{\cos A \cos B} \\ = & \frac{\cos A \cos B - \sin A \sin B}{\cos A \cos B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} \\ = & 1 - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} \end{aligned}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

الآن باستخدام قوانين جمع زاويتين او طرح زاويتين من دالتي \sin, \cos يمكن اشتقاق القوانين التالية:

$$\triangleright \cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta \cos\theta - \sin\theta \sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\triangleright \sin(2\theta) = \sin(\theta + \theta) = \sin\theta \cos\theta + \sin\theta \cos\theta$$

$$\Rightarrow \sin(2\theta) = 2 \sin\theta \cos\theta$$

الآن لو استعملنا القوانين $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

فعند جمع المعادلتين نحصل على:

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta \quad \text{or} \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - 1$$

وعند طرح المعادلتين نحصل على:

$$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta \quad \text{or} \quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

تقسم الدوال المثلثية الى نوعين فمنها دوال فردية ومنها دوال زوجية كما نلاحظ أدناه:

$$\left. \begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sec(-\theta) &= \sec \theta \end{aligned} \right\} \text{even functions}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \csc(-\theta) &= -\csc \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \\ \cot(-\theta) &= -\cot \theta \end{aligned} \right\} \text{odd. functions}$$

هناك زوايا خاصة يجب حفظ نتيجة دوالها المثلثية وهي:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0

يمكنك أيها الطالب ان تستخدم قوانين جمع او طرح زاويتين لدالتي \sin, \cos لتبرهن ان:

- $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$
- $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$
- $\tan(\theta + 2\pi) = \tan \theta$
- $\cot(\theta + 2\pi) = \cot \theta$
- $\sec(\theta + 2\pi) = \sec \theta$
- $\csc(\theta + 2\pi) = \csc \theta$
- $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$
- $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta$

➤ $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

➤ $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

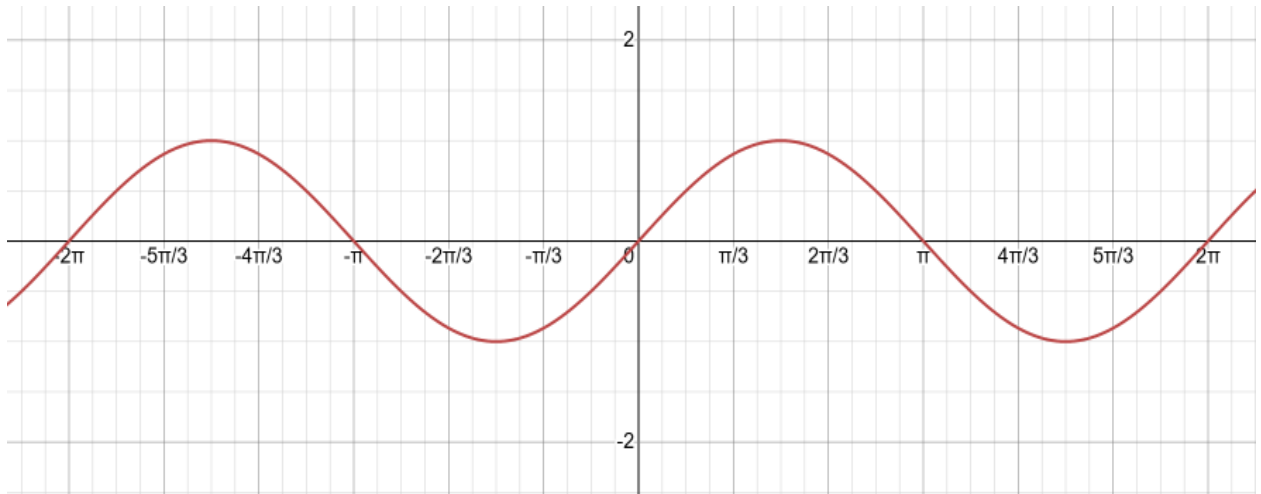
Graphs of Trigonometric Function: التخطيط البياني للدوال المثلثية

1) $y = \sin\theta$

Domain: \mathbb{R} (i. e. $-\infty < \theta < \infty$)

Rang: $-1 < \sin\theta < 1$ (i. e. $R_y = [-1,1]$)

Period: 2π

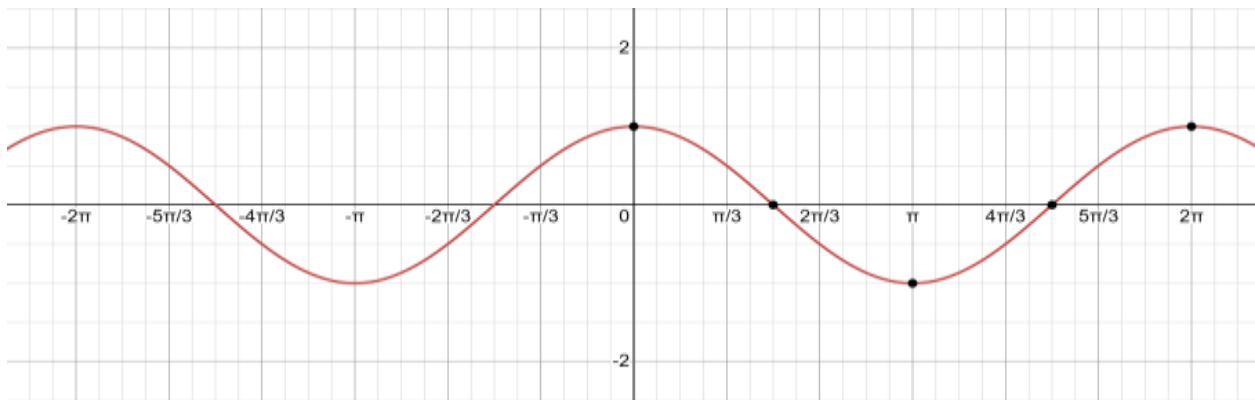


2) $y = \cos\theta$

Domain: \mathbb{R} (i. e. $-\infty < \theta < \infty$)

Rang: $-1 < \cos\theta < 1$ (i. e. $R_y = [-1,1]$)

Period: 2π

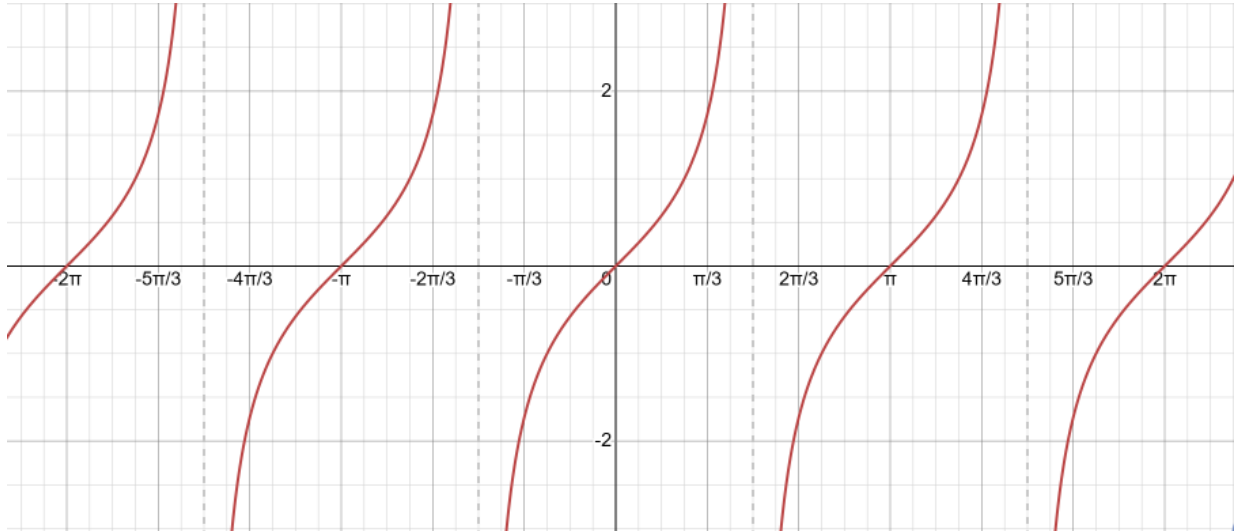


3) $y = \tan\theta$

$D_y: \mathbb{R} / \left\{ \frac{\pi}{2}(2n + 1) \right\}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$R_y = (-\infty, \infty)$

Period: π

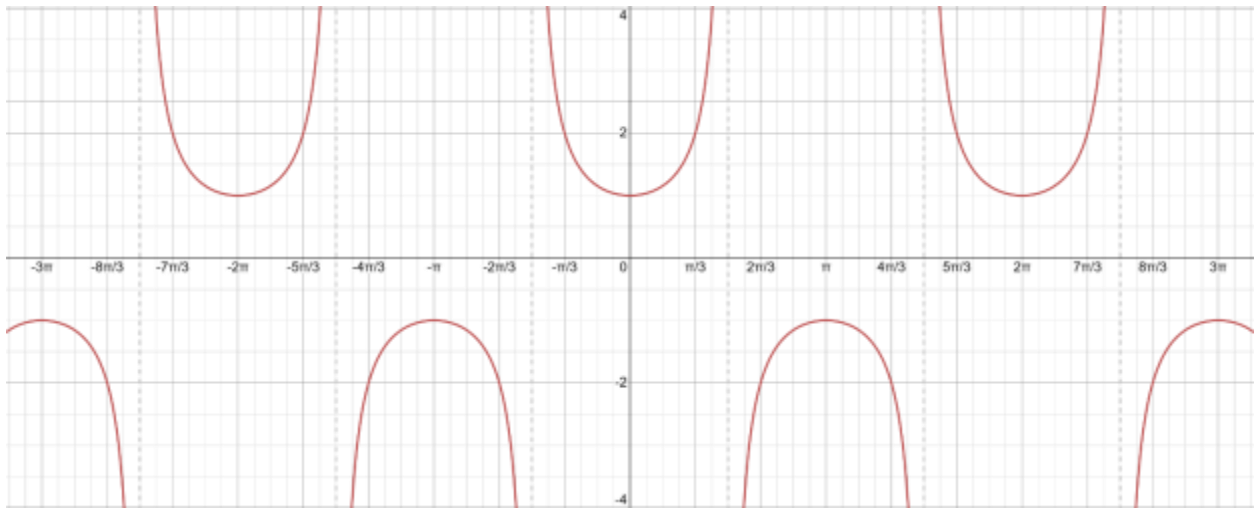


4) $y = \sec\theta$

$D_y: \mathbb{R} / \left\{ \frac{\pi}{2}(2n + 1) \right\}_{n=0}^{\infty}$

$R_y = \mathbb{R} / (-1, 1)$

Period: 2π



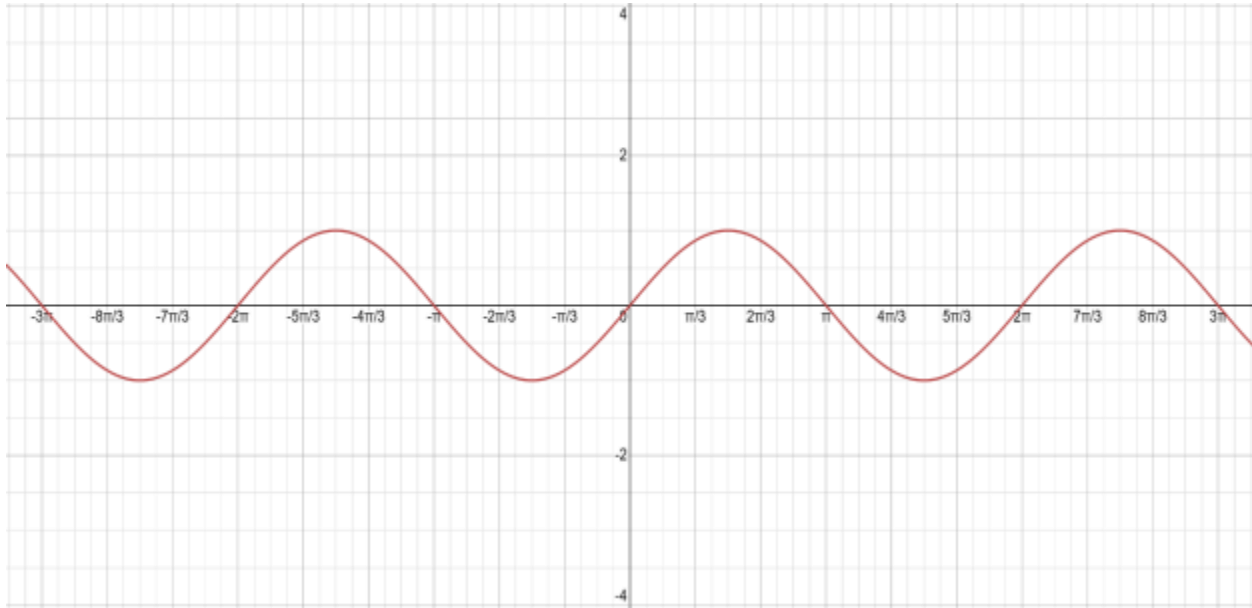
5) $y = 2\sin\theta$

$D_y: \mathbb{R}$

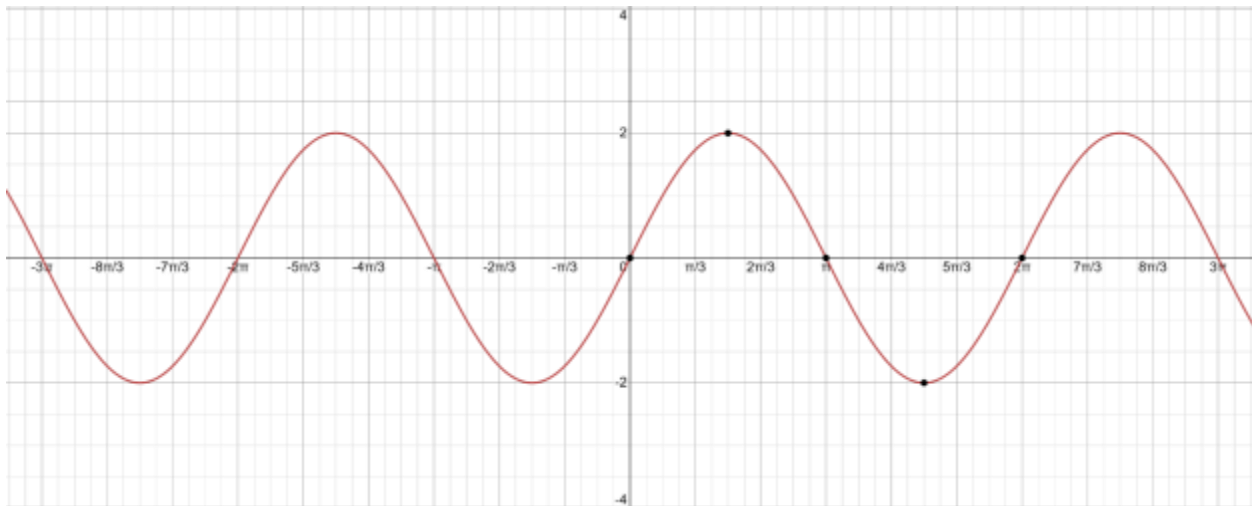
$R_{\sin} = [-1,1]$

$R_y = [-2,2]$

$y = \sin\theta$



$y = 2\sin\theta$

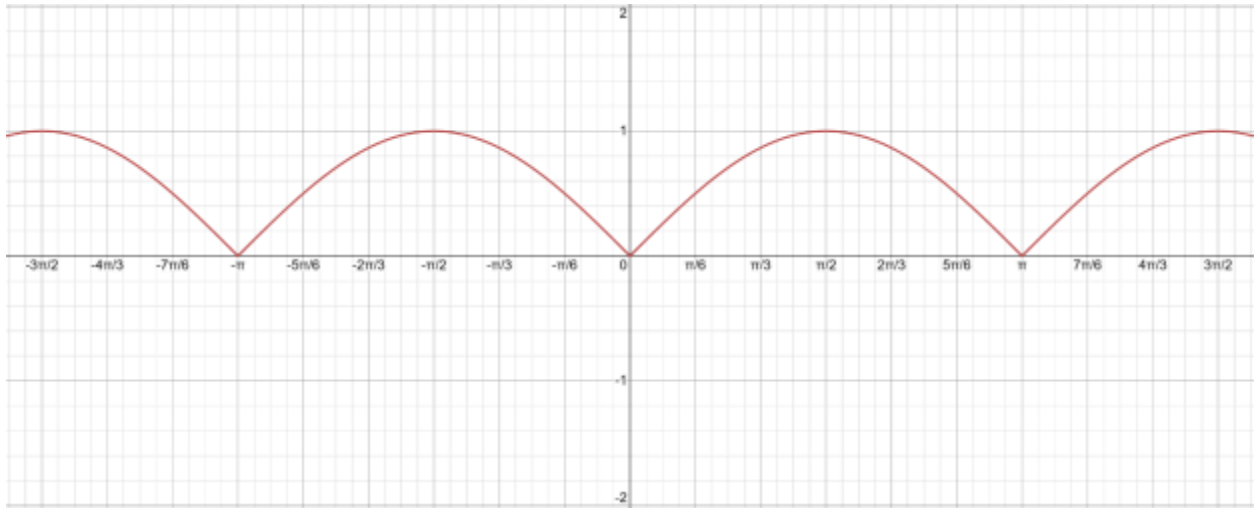


6) $y = |\sin\theta|$

$D_y: \mathbb{R}$

$R_{\sin} = [-1,1]$

$R_y = [0,1]$



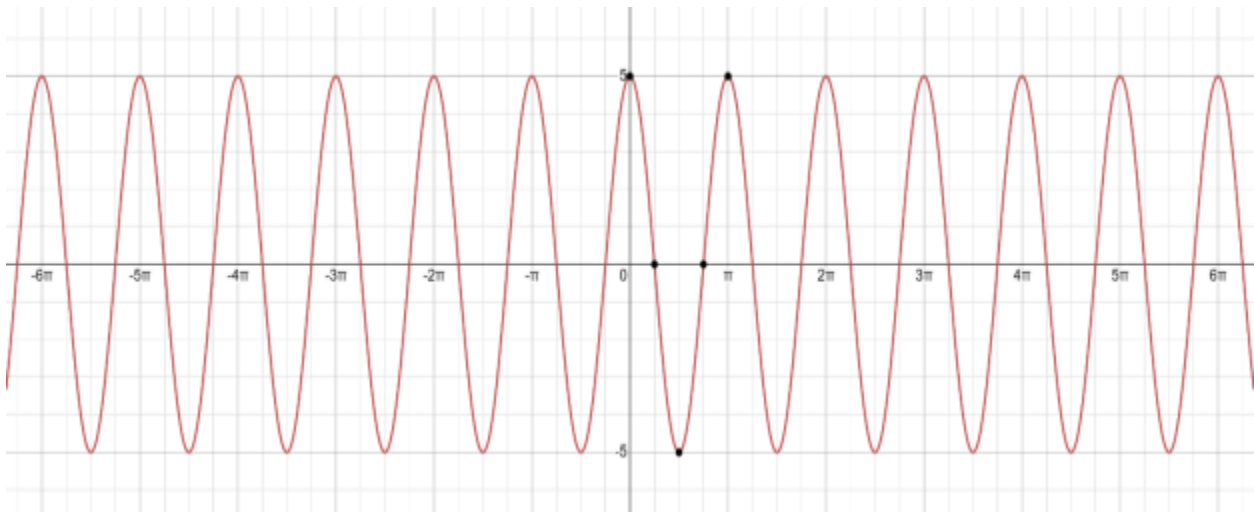
7) $y = 5 \cos(2\theta)$

$D_y: -2\pi \leq 2\theta \leq 2\pi$

$-\pi \leq \theta \leq \pi$

$R_{\cos} = [-1,1]$

$R_y = [-5,5]$



Exercises

A) Graph the following functions over the given intervals of θ – *valucs*

1) $y = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

2) $y = \cos(3\theta)$

3) $y = 1 + \sin(\theta)$

4) $y = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$

5) $y = |\sin(4\theta)|$

6) $y = 2 \sin(\theta + \pi)$

B) Which of the following equations have the same graph?

1) $y = \sin(\theta)$

2) $y = \cos(\theta)$

3) $y = \sin(-\theta)$

4) $y = \cos(-\theta)$

5) $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

6) $y = -\sin(\theta)$

7) $y = -\cos(\theta)$

8) $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

9) $y = \cos(\theta + \pi)$

10) $y = \sin(\theta + \pi)$

11) $y = \cos(\theta - \pi)$

12) $y = \sin(\theta - \pi)$

13) $y = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

Limits of Trigonometric Function: غاية الدوال المثلثية

$$\triangleright \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

$$\triangleright \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$$

$$\triangleright \lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$$

$$\triangleright \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = 1$$

$$\triangleright \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$

Examples: find the following limits.

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x}, \text{ when } x \rightarrow 0, \text{ then } 3x \rightarrow 0 \\ &= \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3(1) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} \\ \text{let } y = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \sin y = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \end{aligned}$$

H.W

$$1) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sec \theta - \cos \theta}{\theta^2}$$

$$2) \lim_{h \rightarrow 2} \frac{\cos \frac{\pi}{h}}{h - 2}$$

Exercises:

Find the following limits, if they exist?

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (\tan(2x) \cdot \csc(4x))$$

$$2) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x \cos(5x)}$$

$$4) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5t}{\tan(6t)}$$