جامعة تكريت

كلية التربية للبنات

قسم الرياضيات

تفاضل وتكامل

الاعداد الحقيقية

ا.م.د.هبه هاني عبدالله

hiba.h.a.83@tu.edu.iq

الاعداد الحقيقية : The Reat Number :

المجموعات الجزئية من R .

١- مجموعة الاعداد الطبيعية Natural Number يرمز لها بالرمز N .

N = {1,2,3,4,……………………}

٢- مجموعة الاعداد الصحيحة Integer Number يرمز لها بالرمز I او Z .

I or Z = {………, -3,-2,-1,0,1,2,3,…………}

٣- مجموعة الاعداد النسبية Rational Number وهي مجموعة كل الاعداد التي يمكن كتابتها على شكل نسبة عددين صحيحين بحيث لا يوجد عامل مشترك بينهما والمقام لا يساوي صفر ويرمز لها بالرمز (Q).

$Q = \{X \in R, X = \frac{m}{n}$; m , n عددان صحيحان لا يوجد عامل مشترك بينهما و $n \neq ٠$ }

ونلاحظ ان من خواص الاعداد النسبية انه يمكن كتابتها على شكل كسر عشري منته او دوري مثل :

$\frac{1}{4} = ٠,٢٥$, $\frac{1}{3} = ٠,٣٣٣$

٤- مجموعة الاعداد غير النسبية Irrational Number هي مجموعة الاعداد الحقيقية التي لا يمكن كتابتها على شكل نسبة عددين صحيحين مثل : $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π حيث π النسبة الثابتة 3.14 or $\pi \cong \frac{22}{7}$ ، ويرمز لها بالرمز (σ) .

لاحظ ان :

$$\emptyset \subset N \subset I \subset Q \subset R$$

$$Q \cup Ő = R$$

Intervals (الفترات)

١. (الفترات المنتهية) Finite intervals

ليكن كل من a , b عددين حقيقيين حيث $a < b$

أ- (الفترة المفتوحة) Open interval

$$\{ x \in R : a < x < b \} = (a, b)$$

لاحظ ان :

${}_a(\dots\dots\dots)_b \longrightarrow R$ $b \notin (a,b)$ و $a \notin (a, b)$

النقطتان a,b تدعيان نقطتا نهايتا الفترة .

ب- (الفترة المغلقة) Closed interval

$$\{ x \in R : a \le x \le b \} = [a, b]$$

لاحظ ان :

${}_a[\dots\dots\dots]_b \longrightarrow R$ $b \in [a,b]$ و $a \in [a,b]$

النقطتان a,b تدعيان نقطتا نهايتا الفترة .

ج- (الفترة نصف المفتوحة) the Half-open interval

$$\{ x \in R : a < x \le b \} = (a, b]$$

لاحظ ان :

${}_a(\dots\dots]_b \longrightarrow R$ $b \in (a,b]$ و $a \notin (a,b]$

$$\{ x \in R : a \le x < b \} = [a, b)$$

${}_a[\dots\dots\dots)_b \longrightarrow R$ $b \notin [a, b)$ و $a \in [a,b)$

٢. (الفترات غير المنتهية) In Finite intervals

أ-

$\{ x \in R : x > a\} = (a , \infty)$

$(a \ldots\ldots\ldots \longrightarrow \quad R$

ب-

$\{ x \in R : x \geq a\} = [a , \infty)$

$[a \ldots\ldots\ldots \longrightarrow \quad R$

ج-

$\{x \in R : x < a\} = (-\infty , a)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots a) \longrightarrow R$

د-

$\{x \in R : x \leq a\} = (-\infty , a]$

$\ldots\ldots\ldots\ldots a] \longrightarrow R$

ه-

$\{ x \in R : -\infty < x < \infty \} = (-\infty,\infty) = R$

$\ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow \quad R$

Inequalities (المتراجحات)

ليكن كل من a و b عددين حقيقيين، يقال أن: b اكبر من a ويرمز لهُ بالرمز b > a إذا اذا كان b – a > o (عدد موجب).

حل المتراجحة :

هو مجموعة القيم التي تحقق المتراجحة بعد التعويض بالمتغير (x).

قضية :

ليكن $a,b,c \in R$ فـــأن :

١. إذا كان $a < b$ فإن: $a + c < b + c$

٢. إذا كان $a < b$ وكان $c > ๐$ فإن: $a.c < b.c$

٣. إذا كان $a < b$ وكان $c < ๐$ فإن: $a.c > b.c$

متراجحة من الدرجة الاولى :

مثال (١): حل المتراجحة.

$$3(x + ٢) < ٥$$

الحل:

$$3(x + ٢) < ٥ \longrightarrow 3X + 6 < 5$$

$$\longrightarrow 3X + \quad < 5 - 6$$

$$\longrightarrow 3X + \quad < -١$$

$$\longrightarrow X < -\frac{1}{3}$$

مجموعة الحل هي :

$$(-\infty, \ -\frac{1}{3}) = \{ X \in R : X < -\frac{1}{3} \}$$

مثال (٢): حل المتراجحة

$$٧ < 2X + ٣ < ١١$$

الحل:

$$٧ < 2X + ٣ < ١١ \longrightarrow -3 + 7 < 2X < -3 + 11$$

$$\longrightarrow 4 < 2X < 8$$

$\longrightarrow 2 < X < 4$

مجموعة الحل هي :

$(2,4) = \{ X \epsilon R : 2 < X < 4 \}$

متراجحات من الدرجة الثانية :

مثال (١) حل المتراجحة. $x^2 < 25$

الحل :

$x^2 < 25 \longrightarrow x^2 - 25 < 0$

$\longrightarrow (x - ٥)(x+5) < 0$

- بما ان الناتج سالب اقل من الصفر اذن هناك احتمالات اما :

سالب ← اما - . +

← او + . -

- الاحتمال الاول :

$(x+5) > 0 \wedge (x-5) < 0$

$x > -5 \wedge x < 5$ $\qquad$ $R \longrightarrow 5 \;(\ldots\ldots)\; -5$

- اذن مجموعة الحل لهذا الاحتمال هو (٥ ، ٥ -)

- الاحتمال الثاني :

$(x+5) < 0 \wedge (x-5) > 0$

$x < -5 \wedge x > 5$ $\qquad$ $R \longrightarrow 5 \;(\ldots\ldots\; -5 \;)\ldots\ldots$

- اذن مجموعة الحل لهذا الاحتمال هو ϕ

اذن مجموعة حل المتراجحة = (٥ ، ٥ -) ∪ ϕ = (٥ ، ٥ -)

مثال (٢) : حل المتراجحة .

$x^2 - 5 - 6 > 0$

الحل :

$X^2 - 5 - 6 > 0 \longrightarrow (X-6) \quad (X+1) > 0$

اما + . +

موجب

او - . -

- الاحتمال الاول :

$(X-6) > 0 \wedge (X+1) > 0$

$X > 6 \wedge X > -1$ $\qquad$ -1 (........ 6 (............ $\longrightarrow$ R

$S_1 = \{ X \in R : X > 6 \} = (6 , \infty)$

الاحتمال الثاني :

$X\_6 < 0 \wedge X+1 < 0$

$X < 6 \wedge X < \_1$

$S_2=\{ X \in R : X< \_1\}=\{(-\infty, -1)$......$^{-}1$...)$6$ $\longrightarrow$ R

$S=S_1 \cup S_2$

$=\{ X \in R : X > 6 \vee X < -1\}$

$=(6, \infty) \cup (-\infty,-1)$

$=R / [-1,6]$

القيمة المطلقة Absolute Value :

تعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي X والتي يرمز لها بالرمز | X | كما يلي :

$$|X| = \sqrt{X2} = \begin{cases} X & \text{IF} \quad X > 0 \\ 0 & \text{IF} \quad X = 0 \\ \overline{X}\,X & \text{IF} \quad X < 0 \end{cases}$$

امثلة :

$|\_8| = 8 \quad , \quad |9| = 9 \quad , \quad |0| = 0$

خواص القيمة المطلقة :

١- $|a| = |-a|$

البرهان(للاطلاع) :

$$|a| = \sqrt{(-a)2} = \sqrt{a2} = |a|$$

٢- $|a| = ||a||$

البرهان(للاطلاع):

$$|a| = \sqrt{|a|2} = \sqrt{a2} = |a|$$

٣-

$|a.b| = |a|.|b|$

البرهان (للاطلاع) :

$$|a.b| = \quad = \sqrt{a2.b2} \quad \sqrt{a2} \ . \ \sqrt{b2}$$

$$\sqrt{(a.b)2}$$

$$= |a|.|b|$$

٤- $|\frac{a}{b}| = |\frac{a}{b}| \ ; b \neq ٠$

البرهان (للاطلاع) :

$$|\frac{a}{b}| = (\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = \sqrt{\frac{a2}{b2}} = \frac{\sqrt{a2}}{\sqrt{b2}} = \frac{|a|}{|b|}$$

٥- $|a+b| \leq |a| + |b|$

حل المتراجحات الحاوية على القيمة المطلقة :

من التعريف السابق ل $|x|$ نتوصل الى:

$$|x| = \begin{cases} X & \text{if} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{if} \quad x < 0 \end{cases}$$

اي انه في حالة $x = 0 \Longleftarrow |x| = x$ وهكذا فأن القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي هي عدد حقيقي غير سالب .

ومن الناحية الهندسية فأن القيمة المطلقة لعدد x هي بعد النقطة التي تمثل x عن نقطة الأصل وبصورة عامة $|a\_b|$ هي البعد بين النقطتين a , b على خط الاعداد الحقيقية .

الأن لحل المتراجحة $|x| < 0$ حيث a عدد حقيقي و $X \in R$

If $X \geq 0 \longrightarrow |x| = X$

لكن

$(\_\infty, a)\ , x < a \longleftarrow |x| < a$

If $x < 0 \longrightarrow |x| = \_x$

لكن

$(-a\ ,\ \infty)\ , x > -a \longleftarrow -x < a \longleftarrow |x| > a$

مجموعة حل المتراجحة

$(-a\ ,\ \infty) = \{x \in R : \_a < x < a\}$

$\{x \in R : |x| < a\} = \{x \in R : \_a < x < a\} = (-a, a)$

$\{x \in R : |x| \leq a\} = \{x \in R : \_a \leq x \leq a\} = [-a, a]$

ولحل المتراجحة $|x| > a$ حيث $x \in R$

if $x \geq 0 \longrightarrow |x| = x$

ولكن $|x| > a \longleftarrow x > a\ ,\ (a , \infty)$

$$\text{if} \quad x < 0 \longrightarrow |x| = -x$$

لكن $|x| > a \longrightarrow -x > a \longrightarrow (-\infty, -a)\ ,\ x < -a$

اذن مجموعة الحل المتراجحة

$$\{x \in R : x > a \text{ or } x < -a\}$$

$$=(a, \infty) \cup (\infty, -a)$$

$$= R / [-a, a]$$

اما اذا كان لدينا

$$\{x \in R : |x| \geq a\} = \{x \in R : x \geq a \text{ or } x \leq -a\}$$

$$=[a, \infty) \cup (-\infty, -a] = R / (-a, a)$$

مثال (١) : جد مجموعة حل المتراجحة $|x| > ٣$

الحل :

$$\{x \in R : x > 3 \text{ or } x < -3\} = (3, \infty) \cup (-\infty, -3)$$

$$= R / [-3, 3]$$

مثال (٢) : جد مجموعة الحل المتراجحة $|x| \leq ٤$

الحل :

$$\{x \in R : |x| \leq 4\} = \{x \in R : -4 \leq x \leq 4\}$$

$$=[-4, 4]$$

مثال (٣) جد مجموعة حل المتراجحة $|x-4| < 5$

الحل :

$$\{x : |x-4| < 5\} = \{x : -5 < x-4 < 5\}$$

$$= \{x : -1 < x < 9\} = (-1, 9)$$

مثال (٤) : جد مجموعة حل المتراجحة $|7-4x| \geq ١$

الحل :

$\{x : |7 - 4x| \geq ١\} = \{x : 7 - 4x \geq 1 \text{ or } 7 - 4x \leq -1\}$

$= \{x : -4x \geq -6 \text{ or } 7 - 4x \leq -8\}$

$= \{x : x \leq \frac{3}{2} \quad \text{Or } x \geq 2\}$

$= (-\infty, \frac{3}{2}] \cup [2, \infty)$

$= R / (\frac{3}{2}, ٢)$

تمارين الفصل الأول

(الفترات والمجموعات)

سؤال الأول/ حول المجموعات التالية الى مجموعات بدلالة الفترات , واختبر كون الفترات هذه مفتوحة او مغلقة او نصف مفتوحة .

١. $\{X : -20 \leq X \leq -12\}$
٢. $\{X : -3 \leq X < 4\}$
٣. $\{X : 1 < X < 10\}$

سؤال الثاني / اعط وصفاً للفترات التالية كمجموعات .

$[-1,0)$, $[2,7]$, $(٠,٦)$, $(٣,٥)$