جامعة تكريت

كلية التربية بنات

قسم الرياضيات

تفاضل وتكامل

الغايات

ا.م.د.هبه هاني عبدالله

hiba.h.a.83@tu.edu.iq

الغايات والاستمرارية limits and continuity

الغايات وخواصها the limit and its properties

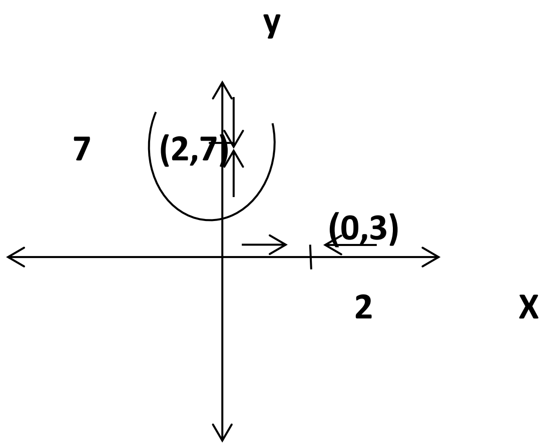
الغاية : هي اقتراب الى نقطة معينة , مثلا اذا افترضنا ان النقطة x_0 هي كلية التربية فأن المتغير x هو الطالب فانه غاية الطالب هي الوصول الى الكلية اي ان غاية x هي الاقتراب من x_0 (ايا كانت الطريقة في الوصول)

مثال: اذا كانت الدالة f(x)=x^2 +3 , ماذا يحدث عندما تقترب x من 2 ؟

الجواب: نتابع اقتراب f(x) عندما x تقترب من 2 كالاتي:

من اليمين	x	3	2.5	2.3	2.1	2.01	2.001	2.0001
	f(x)	1.2	9.25	8.24	7.44	7.040	7.004	7.0004
من اليسار	x	1	1.2	1.4	1.5	1.9	1.99	1.999
	f(X)	4	4.44	4.96	5.25	5.98	6.96	6.999

نلاحظ انه كلما اقترب x من 2 فأن f(x) تقترب من 7



سواء من اليمين او اليسار وهذا واضح من التعويض في الدالة حيث ان f(2)= 4+3=7

ويمكن اعادة تعريف الغاية كالاتي :

تعريف : نقول ان غاية الدالة . f(x) هي L اذا كانت f تقترب من L عندما x تقترب من x_0 و نعبرعنها بالشكل الاتي

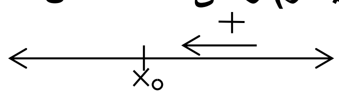
$$L= \lim_{X \to X_0} F(X)$$

ملاحظة:

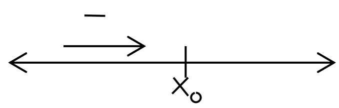
نرمز الى الاقتراب بشكل $(\rightarrow)$ فنعبر عن (X تقترب من X_0) بالشكل ($X\rightarrow X_0$) و (f(x) تقترب من L) بالشكل ($f(x)\rightarrow L$)

اذا نظرنا الى المثال السابق (٢) نلاحظ في الجدول اننا راعينا مسألة اخذ الاقتراب (من اليمين ومن اليسار) وعلى هذا الاساس سنعرف الغاية من اليمين و الغاية من اليسار كالاتي :

الغاية من اليمين $L^{+} = \lim\limits_{X\rightarrow X_0^{+}} F(X)$



الغاية من اليسار $L^{-} = \lim\limits_{X\rightarrow X_0^{-}} F(X)$



طريقة ايجاد الغاية

لإيجاد غاية اي دالة نتبع الحالات الاتية في الحل

1- اذا كانت الدالة f(x) متعددة حدود فأن الغاية يتم ايجادها بالتعويض المباشر عن x_0 كما في المثال الاتي:

مثال: جد غاية الدالة $f(x) = x^2 + x + 5$ عندما x تقترب من 1 , $D_F = R$

الجواب: $L=\lim\limits_{X\rightarrow 1}(X^2 + X + 5) = 1+1+5=7$

$\therefore$ $f(x)\rightarrow 7$ عندما $x\rightarrow 1$

2- اذا كانت الدالة f كسرية فأن الغاية يتم ايجادها كالاتي

A- اذا كانت النقطة X_0 تجعل المقام يساوي صفر فأننا نبسط الدالة باستخدام بعض الطرق (الاختصار – الضرب بالمرافق – التحليل الى العوامل ...) لجعل المقام لايساوي صفر ثم نعوض عن الدالة النهائية كما في الامثلة التالية:

مثال1:-

جد غاية الدالة $f(x)=\frac{x(x+1)}{x}$ عندما x تقترب من (0)

$D_f = R \setminus \{0\}$

الحل:- $L=\lim\limits_{X\rightarrow 0}\frac{X(X+1)}{X} = \lim\limits_{X\rightarrow 0}(X+1) = 1$

(اختصرنا لان النقطة (0) تجعل المقام يساوي صفر)

<u>مثال2</u>:- جد غاية الدالة $f(h)=\frac{(2+h)^2-4}{h}$

الحل:- عندما h تقترب من (0) , $D_F = R\setminus\{0\}$

$$L = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

<u>مثال3</u>:- جد غاية الدالة $f(n)=\frac{\sqrt{4+n}-2}{n}$ **عندما n تقترب من (0) ,** $D_f = [-4,\infty) \setminus \{0\}$

$$L = \lim_{n\to 0}\frac{\sqrt{4+n}-2}{n} = \lim_{n\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+n}-2}{n} \cdot \frac{\sqrt{4+n}+2}{\sqrt{4+n}+2}\right.$$

$$= \lim_{n\to 0}\frac{4+n-4}{n(\sqrt{4+n}+2}$$

$$= \lim_{n\to 0}\frac{n}{n(\sqrt{4+n}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+0}+2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

B- اما اذا كانت النقطه X_0 لا تجعل المقام يساوي صفر فنعوض فيها مباشره كما في المثال الاتي

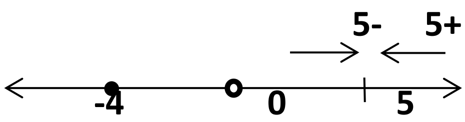
مثال : جد غايه الدالة $f(n)=\frac{\sqrt{4+n}-2}{n}$ **عندما n تقترب من 5**

الحل:

$D_f = 4+n \geq 0 \rightarrow n \geq -4$

$n \neq 0$

$D_f=[-4,\infty)\setminus\{0\}$



$$L=\lim_{N\to 5}\frac{\sqrt{4+n}-2}{n} = \frac{\sqrt{4+5}-2}{5} = \frac{1}{5}$$

3- اذا كانت الدالة جذرية فلإيجاد الغاية نتبع الاتي

A- اذا كانت النقطة X_0 نقطة حدودية (اي واقعة على حدود المجال (D_f) فيجب ان نجد الغاية من اليمين والغاية من اليسار واحداهما ستكون غير موجودة (و عليه تكون الغاية الكلية غير موجودة)

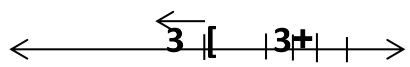
ملاحظة:

هذه الحالة بالنسبة الى الحدود الزوجية لان مجال الجذور الفردية هو كل R طالما ان الدالة الجذرية ليست في المقام

مثال:- جد غاية الدالة $f(x)=\sqrt{2x-6}$ عندما x تقترب من 3

الحل: $2x-6 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 6 \rightarrow x \geq 3$

$$D_f = [\,3, \infty)$$



$$L=\lim_{X\to 3} \sqrt{2X-6}$$

النقطة X_0 هي (3) واقعة على حدود المجال نجد الغايتين – L و +L

$$L+=\lim_{X\to 3+} \sqrt{2X-6} \quad = \sqrt{6-6} \quad =0$$

$$L-=\lim_{X\to 3-} \sqrt{2X-6}$$ غير موجودة

لان المجال غير معروف من جهة اليسار

$$\therefore \; L \neq \lim_{X\to 3} \sqrt{2X-6}$$ غير موجوده

مثال2:- جد غاية الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x^3-8}$ عندما X تقترب من 3

الحل: $D_F = R$

$$L=\lim_{X\to 2} \sqrt[3]{X^3-8} = \sqrt[3]{8-8} = 0$$

مثال3:- جد غاية الدالة $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-2}$ عندما تقترب x من 2

الحل:

$$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2$$

$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \qquad D_f = (2, \infty)$$

$$L=\lim_{X\to 2}\frac{\sqrt{X-2}}{X-2} = \lim_{X\to 2}\frac{1}{\sqrt{X-2}}$$

$$L+=\lim_{X\to 2+}\frac{1}{\sqrt{X-2+}} = +\infty \quad \frac{+1}{0+}$$

$$L-=\lim_{X\to 2-}\frac{1}{\sqrt{X-2}}$$ غير موجودة

$$\therefore L=\lim_{X\to 2}\frac{\sqrt{X-2}}{X-2}$$ غير موجودة

B- اذا كانت النقطة X_0 موجودة داخل مجال الدالة فنعوض عنها مباشر دون ايجاد الغاية من اليمين ومن اليسار

مثال:- جد غاية الدالة $f(x)=\sqrt{2x-6}$ عندما x تقترب من 5

الحل: $D_f=[3,\infty)$

$5\in D_f=[3,\infty)$ ليست نقطة حدودية

$$\therefore \quad L=\lim_{X\to 5}\sqrt{2X-6} = \sqrt{10-6} = \sqrt{4} = 2$$

4- اذا كانت الدالة مجزئة فلإيجاد الغاية نتبع الاتي

A- اذا كانت النقطة X_0 نقطة فاصلة بين جزئي الدالة فنجد الغاية من اليمن و الغاية من اليسار (فاذا كانت الغايتان موجودتين و متساويتين فالغاية النهائية موجودة) كما في المثال الاتي :

مثال1:-

$$L=\lim_{X\to 0}|X| = \lim_{X\to 0}\begin{cases} X & if\ x\geq 0 \\ -X & if\ x<0 \end{cases}$$

∴ النقطة (0) هي نقطة فاصلة بين جزئي الدالة

∴ نجد الغاية من اليمين و الغاية من اليسار

$$L+=\lim_{X\to 0+}|X| = \lim_{X\to 0}X = 0$$

$$L-=\lim_{X\to 0+}|X| = \lim_{X\to 0}(-X)=0$$

$$\therefore \ L+=L- \quad \therefore \ L=\lim_{X\to 0}|X|=0$$

مثال 2:- جد غاية الدالة $f(y)=\begin{cases} y+2 \geq 0 \\ 2 \quad y<0 \end{cases}$ عندما y تقترب من 0

الحل: النقطة (0) نقطة فاصلة ∴ نجد الغايتين +L و -L

$$L+=\lim_{Y\to 0+} f(y) = \lim_{y\to 0}(y+2) = 0+2 = 2$$

$$L-=\lim_{Y\to 0-} f(y) = \lim_{y\to 0}(2) = 2$$

اذن الغاية موجودة وتساوي (2)

B- اذا كانت النقطة X_0 ليست نقطة فاصلة فنجد الغاية بالتعويض المباشر في الجزء الذي تنتمي اليه النقطة و كما في الامثلة الاتية :

<u>مثال1</u> :- جد غاية الدالة $f(x)=|x|$ عندما x تقترب من (-1)

الحل: $L=\lim_{X\to -1}|X| = |-1| = 1$

<u>مثال2:</u>- جد غاية الدالة $f(y)=\begin{cases} y+2 & y \geq 0 \\ 2 & y<0 \end{cases}$ **عندما y تقترب من 1**

الحل: النقطة (1) تنتمي الى الجزء الاول من المجال

$$\therefore\ L=\lim_{Y\to 1}(Y+2) = 1+2 = 3$$

<u>ملاحظة:-</u>

من جميع ما سبق نلاحظ في الغايات ان النقطة x_0 ليست من الضروري ان تنتمي الى مجال الدالة ولكن يجب ان تكون هناك فترة مفتوحة تحيط بالنقطة x_0 تنتمي الى مجال الدالة لكي نجد الغاية كما في المثال(1) من الحالة (2) الدالة الكسرية $f(x)=\frac{x(x+1)}{x}$, $0 \notin D_f$ حيث ان النقطة (0) لا تنتمي الى مجال الدالة و لكن اي فترة مفتوحة نأخذها تحتوي (0) نجد انها موجودة في المجال و عليه استطعنا ايجاد الغاية

<u>حالات عدم وجود الغاية</u>

توجد حالتين في عدم وجود الغاية

1- اذا كانت احدى الغايتين غير موجودة (+L او -L) فعندها نقول ان الغاية غير موجودة كما في المثال (1) في الحالة (3)

<u>EX</u> $\lim_{X\to -\frac{1}{2}} \sqrt{4X^2-1}$

2- اذا كانت الغايتان موجودتين و لكنهما غير متساويتين فنقول ان الغاية غير موجودة كما في المثال الاتي:

<u>مثال:-</u> جد غاية الدالة $f(x)=\frac{|x|}{x}$ **عندما** $x\to 0$

الحل: $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \text{غير معرفة} & x = 0 \\ \frac{-x}{x} & x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \text{غير معرفة} & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

نلاحظ ان النقطة 0 هي نقطة فاصلة , نجد الغايتين +L- ,L

موجودة $L+ = \lim_{X\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

موجودة $L- = \lim_{X\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-1) = 1$

$L+ \neq L-$

$\therefore \quad L = \lim_{X\to 0} \frac{|X|}{X}$

مبرهنات حول الغايات

م١: لتكن $P(X) = C_0 + C_1 X + \ldots + C_n x^n$ متعددة حدود حيث ان C_n ..... و C_1 و C_0 اعداد حقيقية و $C_n \neq 0$ و n عدد صحيح غير سالب فان $\lim_{x\to x_0} p(x) =$

$$c_0 + c_1 x_0 + \cdots + c_n x_0^n = p(x_0)$$

م٢: لتكن $f(x)=c$ و c عدد حقيقي (تسمى f دالة ثابتة) فأن

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = c$$

مثال:- $f(x)=4 , x\to 1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 4$$

م٣: لتكن c عدد حقيقي و لنفرض ان $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجودة

فأن $\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x)$

مثال:- $f(x)=x^2$, $c=2$, $x\to 1$

$$\lim_{x\to1} c\, f(x) = \lim_{x\to1} 2x^2 = 2\lim_{x\to1} x^2 = 2$$

م٤: اذا كان كلاً من $\lim_{x\to x_0} f(x)$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)$ موجودة فأن $\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big)$ موجودة وتمثل

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(X)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

م٥: اذا كان كلاً من $\lim_{x\to x_0} f(x)$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)$ موجودة فأن

$\lim_{x\to x_0} \big(f(x).g(x)\big)$ موجودة وتمثل

$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\,.\ g(X)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\,.\lim_{x\to x_0} g(x)$$

م٦: اذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)$ موجودة فأن

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$$

مثال: اذا كانت $f(x) = x^2 + 2$ أوجد $\lim_{x\to0}(x^2+2)^3$

$$\lim_{x\to0}(x^2+2)^3 = \left(\lim_{x\to0}(x^2+2\right)^3 = (2)^3 = 8$$

تعريف: يقال الدالة r(x) بأنها دالة نسبية اذا كانت $r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ حيث ان كل من p و q متعدده حدود ل x و $q(x) \neq 0$

م٧: لتكن r(x) دالة نسبية فأن

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \mathrm{r}(x_0)$$

الغايات اللانهائية و الغايات عند اللانهائية

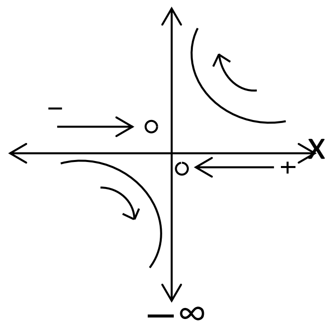
الغايات اللانهائية : هي الغايات التي يكون ناتجها (∞ او $-\infty$)

مثال١: $\lim_{X\to0}\frac{1}{X}$

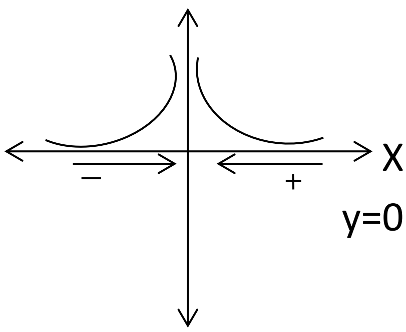
$L+ = \lim_{X\to0+}\frac{1}{X} = \infty$ و $L- = \lim_{X\to0-}\frac{1}{X} = -\infty$

∞ $L+ \neq L-$

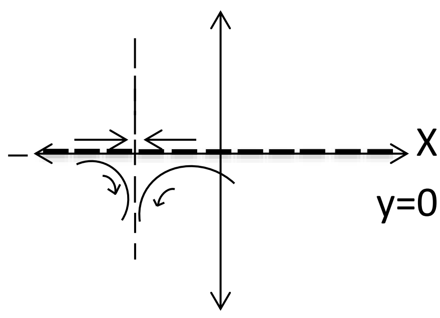
$L=\lim_{X\to0}\frac{1}{X}$ غير موجودة



مثال٢: $x = 0$ $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2} = \infty$



$\lim_{x\to-2}\frac{-1}{(x+2)^2} = -\infty$



X=-2

الغايات عند اللانهائية

هي الغايات التي تكون فيها x تقترب من ∞ و∞—

مثال: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

طريقة الحل :- في هذا النوع من الغايات نحل بقسمة البسط و المقام على x (ذي اكبر قوه) فسوف تصبح لدينا ثلاث حالات لنتاج الغاية

١- اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام فالغاية تساوي ∞او ∞—

مثال :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+2}{x^2+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{1+0}{0+0}=\frac{1}{0}=\infty$$

٢- اذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام فالغاية تساوي (معامل الحد ذي اكبر قوة في البسط على معامل مثيله في المقام)

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{5x^2+2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x^2}}$$

$$=\frac{1+0}{5+0}=\frac{1}{5}$$

٣- اذا كانت درجة البسط اقل من درجة المقام فالغاية تساوي صفر

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{2x^2-7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{2-\frac{7}{x}+\frac{5}{x^2}} =\frac{0}{2-0+0} =\frac{0}{2}=0$$

مثال: جد الغاية الاتية ان وجدت $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-n\right)$

الحل: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{x^2+1}+n} =$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}+\frac{n}{n}} = \frac{0}{2} = 0$$

ملاحظة: جميع النظريات السابقة حول الغايات تصح في الغايات اللانهائية و الغايات عند اللانهائية