جامعة تكريت
كلية التربية للبنات
قسم الرياضيات
تفاضل وتكامل
تركيب الدوال
ا.م.د.هبه هاني عبدالله
hiba.h.a.83@tu.edu.iq

الدوال المركبة: ***Composition***

تعريف: لتكن كل من f و g دالـة بحيث يكون مـدى (g) $R_g \subseteq D_{f_1}$ مجموعـة جزئيـة من منطلق f فتوجد دالة fog معرفة بالصيغة التالية:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

$$Dom_{(fog)} = \{X: g(x) \in Dom_f \wedge \times\in Dom_g\}$$

لمناقشـــــة gof لتكن كل من g,f دالة بحيث يكون $R_f \subseteq D_g$ فأنه يمكن تعريف الدالة المركبة gof كالآتي:

$$(gof(x) = g\,(f(x))$$

$$Dom_{(gof)} = \{x: f(x) \in Dom_g \wedge \times \in Dom_f\}$$

ملاحظة: ان عملية التركيب غير إبداليه أي أن: $fog \neq gof$.

مثال (1): لتكن $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + 1$ جد fog و gof

Sol:

$$f(x) = \sqrt{x}\ ,\ D_f = R^+ = [0,\infty)$$

لإيجاد المدى $y = \sqrt{X} \Rightarrow y^2 = x \Rightarrow R_f = R^+ = [0,\infty)$

$$g(x) = x^2 + 1, D_g = R$$

$$y = g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = y - 1$$

$$y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1, R_g = [1,\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x}, g_{(x)} = x^2 + 1$$

لايجاد fog يجب ان يكون $R_g \subseteq D_f$

موجود $[1,\infty) \subseteq [0,\infty) \Rightarrow fog$

$$(fog)_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = \sqrt{g_{(x)}} = \sqrt{x^2+1}$$

$$(fog)_{(x)} = \sqrt{x^2+1}$$

$$D_{fog} = \left\{X : X \in D_g \wedge g_{(x)} \in D_f\right\}$$

$$= \{X : X \in R \wedge x^2 + 1 \in R^+\}$$

$$= \{X : X \in R \wedge x \in R\} = R$$

ولكن بما أن: $X \in R \Longrightarrow x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \geq -1 \Longrightarrow x^2 + 1 \geq 0$

ولايجاد gof يجب ان يكون $R_f \subseteq D_g$

موجود $R^+ \subseteq R \Longrightarrow gof$

$$(gof)_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

$$(gof)_{(x)} = x + 1$$

$$D_{gof} = \left\{X : X \in D_f \wedge f_{(x)} \in D_g\right\}$$

$$= \left\{X : X \in R^+ \wedge \sqrt{x} \in R\right\}$$

$$= \{X : X \in R^+ \wedge x \in R^+\} = R^+$$

$$x \in R^+ \Longleftarrow x \geq 0 \Longleftarrow \sqrt{x \geq 0}$$

مثال (2): لتكن $f(x) = \sqrt{x-4}$, $g(x) = \frac{X+1}{3-X}$. جد gof, fog

Sol:

$f(x) = \sqrt{x-4}$

$x - 4 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 4, D_f = [4, \infty)$

$y = \sqrt{x-4} \Longrightarrow y^2 = x - 4 \Longrightarrow x = y^2 + 4;\ R_f = R^+$

$g(x) = \dfrac{x+1}{3-x}$

$3 - x \neq 0 \Longrightarrow x \neq 3;\ D_g = R \setminus \{3\}$

$y = \dfrac{x+1}{3-x} \Longrightarrow x + 1\ y(3-x) \Longrightarrow x + 1 = 3y - xy \Longrightarrow x + xy$

$= 3y - 1 \Longrightarrow x = \dfrac{3y-1}{1+y};\ 1 + y \neq 0 \Longrightarrow y \neq 0;\ R_g = R \setminus \{-1\}$

الان لإيجاد fog هل ان $R_g \subseteq D_f$؟

$R \setminus \{-1\} \nsubseteq [4, \infty)$

$\therefore fog\ is\ not\ exist$

الان لايجاد gof هل أن $R_f \subseteq D_g$؟

$R^+ \nsubseteq R \setminus \{3\}$

$\therefore gof\ is\ not\ exist$

مثال (3): ليكن $f(x) = |x|$, $g(x) = -x$، جد fog, gof.

Sol:

$f(x) = |x|$

$D_f = R, R_f = R^+$

$g(x) = -x$

$D_g = R, R_g = R$

الآن لايجاد fog هل أن $R_g \subseteq D_f$

$R \subseteq R \Longrightarrow fog\ is\ exist$

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big)$

$= f(-x)$

$= (-x)$

$D_{fog} = \{X \in R; x \in D_g \wedge g_{(x)} \in D_f\}$

$= \{X \in R; x \in R \wedge -x \in R\} = R$

$-\infty < -\boldsymbol{X} < \infty$

$\infty > \boldsymbol{X} > -\infty$

$-\infty < \boldsymbol{X} < \infty$

الان لايجاد gof هل أن $R_f \subseteq D_g$؟

$R^+ \subseteq R \Longrightarrow gof\ is\ exist.$

$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = g(|x|) = -|x|$

$D_{gof} = \{X \in R; X \in R; x \in D_f \wedge f_{(x)} \in D_g\}$

$= \{X \in R; X \in R \wedge |X| \in R\}$

$= \{X \in R; X \in R \wedge x \in R\} = R$

مثال (4): ليكن $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $g(x) = \frac{x-1}{x}$ جد: fog , gof.

Sol:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} ; x + 2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq -2$$

$$D_f = R \setminus \{-2\}$$

$$y = \frac{x}{x+2} \Longrightarrow x = y(x+2)$$

$$\Longrightarrow x = yx + 2y$$

$$\Longrightarrow x - yx = 2y \Longrightarrow x = \frac{2y}{1-y}$$

$$1 - g \neq 0 \Longrightarrow y \neq 1$$

$$\therefore R_f = R \setminus \{1\}$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x} ; x \neq 0$$

$$D_g = R \setminus \{0\}$$

$$y = \frac{x-1}{x} \Longrightarrow x - 1 = yx$$

$$\Longrightarrow x - yx = 1$$

$$\Longrightarrow x = \frac{1}{1-y}$$

$$1 - y \neq 0 \Longrightarrow y \neq 1$$

$$\therefore R_g = R \setminus \{1\}$$

الان لإيجاد fog هل أن $R_g \subseteq D_f$؟

$R \setminus \{1\} \nsubseteq R \setminus \{-2\} \Longrightarrow fog\ is\ not\ exist.$

الان لإيجاد gof هل أن $R_f \subseteq D_g$؟

$R \setminus \{1\} \nsubseteq R \setminus \{0\} \Longrightarrow gof\ is\ not\ exist.$

مثال (5): اذا كانت $f(t) = t^2$ جد الدالتين g, h بحيث:

$(fog)(x) = (foh)(x) = x^2 - 10x + 25$

Sol:

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = (g(x))^2 since\ f(t) = t^2$

$but\ (fog)(x) = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

$\therefore (g(x))^2 = (x-5)^2$

$\Longrightarrow \big(g(x)\big)^2 - (x-5)^2 = 0$

$\Longrightarrow [g(x) - (x-5)][g(x) + (x-5)] = 0$

أما $g(x) - (x-5) = 0 \Longrightarrow g(x) = x - 5$

أو $g(x) + (x-5) = 0 \Longrightarrow g(x) = -(x-5)$

بما ان: $(fog)(x) = (foh)(x)$

$\Longrightarrow g(x) = x - 5, h(x) = -(x-5)$

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(x-5) = (x-5)^2 = x^2 - 10x$

$\therefore g(x) = h(x) = \pm(x-5)$